

UNIVERSIDADE FEDERAL
FLUMINENSE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
GEOLOGIA E GEOFÍSICA MARINHA

TOMOGRAFIA SÍSMICA POR TEMPOS DE
TRÂNSITO POÇO-A-POÇO

FELIPE VIEIRA CAPUCCI

2013

FELIPE VIEIRA CAPUCCI

TOMOGRAFIA SÍSMICA POR TEMPOS DE TRÂNSITO POÇO-A-POÇO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA AO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOLOGIA E
GEOFÍSICA MARINHA DA UNIVERSIDADE FEDERAL
FLUMINENSE COMO REQUISITO PARCIAL PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.
Sc.).

BANCA EXAMINADORA:

D. Sc. MARCO ANTÔNIO CETALE SANTOS

D. Sc. JORGE LEONARDO MARTINS

D. Sc. LUIZ ALBERTO SANTOS

D. Sc. DJALMA MANOEL SOARES FILHO

Sumário

Lista de Figuras	p. iv
Abstract	p. ix
Resumo	p. x
Agradecimentos	p. xi
1 Introdução	p. 1
2 Tomografia por Tempos de Trânsito	p. 4
2.1 Problema Direto	p. 4
2.2 Problema Inverso	p. 7
2.3 Algoritmos de Traçamento de Raios	p. 7
2.3.1 Método utilizando a Equação do Raio	p. 8
2.3.2 Métodos de Encurvamento do Raio Reto	p. 9
2.3.2.1 Método de Prothero <i>et al</i> (1988)	p. 10
2.3.2.2 Método de Um e Thurber (1987)	p. 13
2.3.3 Método baseado na Equação Eikonal	p. 14
2.3.4 Comparações e Exemplos	p. 18
3 Teoria Geral da Inversão	p. 26
3.1 Inversão Linear	p. 27
3.1.1 Mínimos Quadrados	p. 28
3.1.2 Gradiente Conjugado Linear	p. 29

3.2	Inversão Não-Linear	p. 31
3.2.1	Inversão Linearizada	p. 31
3.2.2	Gradiente Conjugado Não-Linear	p. 33
4	Metodologia	p. 35
4.1	Parametrização do Modelo	p. 36
4.2	Geração dos dados sintéticos	p. 37
4.3	Cálculo das derivadas de Fréchet	p. 37
4.4	Regularização	p. 39
4.5	Solução e Aspectos Práticos	p. 41
4.6	Tomografia	p. 43
4.7	Modelo Inicial, informações <i>a priori</i> e tratamentos <i>a posteriori</i>	p. 44
5	Aplicações	p. 46
5.1	Aplicações livre de ruído	p. 46
5.1.1	Modelo I	p. 46
5.1.1.1	Discussão	p. 54
5.1.2	Modelo II	p. 55
5.1.2.1	Discussão	p. 58
5.1.3	Modelo III	p. 58
5.1.3.1	Discussão	p. 61
5.2	Aplicações com ruídos aleatórios	p. 61
5.2.1	Modelo I	p. 62
5.2.1.1	Discussão	p. 70
5.2.2	Modelo II	p. 70
5.2.2.1	Discussão	p. 70
5.2.3	Modelo III	p. 73

5.2.3.1	Discussão	p.73
6	Conclusões	p.76
	Referências Bibliográficas	p.78
	Apêndice A - Modelagem Sísmica Acústica	p.80

Lista de Figuras

- | | | |
|---|--|-------|
| 1 | Ilustração demonstrando um raio percorrendo um modelo 2-D de células de vagarosidades homogêneas. Modificado de Berryman(1991) | p. 6 |
| 2 | No contexto 2-D o ponto a ser calculado (em cor branca) depende dos tempos de seus vizinhos (em cores pretas). Adaptado de Podvin e Lecomte (1991). | p. 17 |
| 3 | Teste do <i>raytracing</i> em um modelo homogêneo. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Tempos de trânsito em conjunto com o sismograma registrado pela modelagem sísmica por diferenças finitas onde o + vermelho é o tempo encontrado por <i>bending</i> e o círculo azul é o tempo encontrada pela solução da Equação Eikonal. (c) Traçado de raios por <i>bending</i> . (d) Traçado de raios utilizando a Equação Eikonal. | p. 21 |
| 4 | Teste do <i>raytracing</i> em um modelo gradiente vertical. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Tempos de trânsito em conjunto com o sismograma registrado pela modelagem sísmica por diferenças finitas onde o + vermelho é o tempo encontrado por <i>bending</i> e o círculo azul é o tempo encontrada pela solução da Equação Eikonal. (c) Traçado de raios por <i>bending</i> . (d) Traçado de raios utilizando a Equação Eikonal. | p. 22 |
| 5 | Teste do <i>raytracing</i> em um modelo de duas camadas. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Tempos de trânsito em conjunto com o sismograma registrado pela modelagem sísmica por diferenças finitas onde o + vermelho é o tempo encontrado por <i>bending</i> e o círculo azul é o tempo encontrada pela solução da Equação Eikonal. (c) Traçado de raios por <i>bending</i> . (d) Traçado de raios utilizando a Equação Eikonal. | p. 23 |

- 6 Teste do *raytracing* em um modelo com três camadas e um gradiente interno. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Tempos de trânsito em conjunto com o sismograma registrado pela modelagem sísmica por diferenças finitas onde o + vermelho é o tempo encontrado por *bending* e o círculo azul é o tempo encontrada pela solução da Equação Eikonal. (c) Traçado de raios por *bending*. (d) Traçado de raios utilizando a Equação Eikonal. p. 24
- 7 Teste do *raytracing* em uma seção suavizada do modelo de Marmousi. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Tempos de trânsito em conjunto com o sismograma registrado pela modelagem sísmica por diferenças finitas onde o + vermelho é o tempo encontrado por *bending* e o círculo azul é o tempo encontrada pela solução da Equação Eikonal. (c) Traçado de raios por *bending*. (d) Traçado de raios utilizando a Equação Eikonal. p. 25
- 8 Algoritmo para a tomografia sísmica. p. 43
- 9 Resultado da Tomografia com o Modelo I utilizando uma parametrização de interpolação bilinear e o modelo inicial homogêneo. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 48
- 10 Resultado da Tomografia com o Modelo I utilizando uma parametrização de células homogêneas e o modelo inicial homogêneo. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 49
- 11 Resultado da Tomografia com o Modelo I utilizando uma parametrização de interpolação bilinear e o modelo inicial próximo ao original. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 50

- 12 Resultado da Tomografia com o Modelo I utilizando uma parametrização de células homogêneas e o modelo inicial próximo ao original. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 51
- 13 Resultado da Tomografia com o Modelo I utilizando uma parametrização de interpolação bilinear, um o modelo inicial próximo ao original e uma maior densidade de raios. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 52
- 14 Resultado da Tomografia com o Modelo I utilizando uma parametrização de células homogêneas, um modelo inicial próximo ao original e uma maior densidade de raios. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 53
- 15 Resultado da Tomografia com o Modelo II utilizando uma parametrização de interpolação bilinear. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 56
- 16 Resultado da Tomografia com o Modelo II utilizando uma parametrização de células homogêneas. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 57
- 17 Resultado da Tomografia com o Modelo III original. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 59
- 18 Resultado da Tomografia com o Modelo III suavizado. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 60

- 19 Resultado da Tomografia com o Modelo I no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 1 milissegundo de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 63
- 20 Resultado da Tomografia com o Modelo I no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 2 milissegundos de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 64
- 21 Resultado da Tomografia com o Modelo I no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 5 milissegundos de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 65
- 22 Resultado da Tomografia com o Modelo I no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 10 milissegundos de desvio padrão. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 66
- 23 Resultado da Tomografia com o Modelo I no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 1 milissegundo de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 67
- 24 Resultado da Tomografia com o Modelo I no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 5 milissegundos de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 68
- 25 Resultado da Tomografia com o Modelo I no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 10 milissegundos de desvio padrão. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 69

- 26 Resultado da Tomografia com o Modelo II no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 1 milissegundo de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 71
- 27 Resultado da Tomografia com o Modelo II no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 5 milissegundos de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 72
- 28 Resultado da Tomografia com o Modelo III no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 1 milissegundo de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 74
- 29 Resultado da Tomografia com o Modelo III no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 10 milissegundos de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original. p. 75

Abstract

Geophysics, mostly the seismic method, is largely used by oil industry in order to achieve a better knowledge of the subsurface geology to find new hydrocarbon accumulations. In this sense, this work addresses the travelttime tomography. The aim of this work is to study travelttime tomography using synthetic data to quantify the influence of acquisition parameters and *a priori* information in the final result of the tomography. As a second objective this work aims to compare raytracing methods. We have as result that travelttime tomography is a effective tool to estimate seismic velocities even if random noise is present in data.

Resumo

A geofísica, principalmente o método sísmico, é amplamente utilizada pela indústria de petróleo e gás para um melhor conhecimento da geologia em sub-superfície a fim de encontrar novas jazidas de hidrocarbonetos. Nesse contexto, o presente trabalho aborda o tema de tomografia sísmica por tempos de trânsito. O objetivo desse trabalho foi estudar a tomografia sísmica por tempos de trânsito com dados sintéticos de forma a quantificar a influência dos parâmetros de aquisição e do incremento de informações *a priori* no resultado final da tomografia. Como objetivo secundário desse trabalho busca-se a comparação entre diversos métodos de traçado de raios. Como resultado a tomografia mostrou-se uma ferramenta eficaz para estimar as velocidades sísmicas mesmo com a presença de ruídos aleatórios nos dados.

Agradecimentos

A lista de pessoas que contribuíram de alguma forma para que fosse possível a realização desse trabalho é imensa. Acredito que essa seja a parte mais difícil de escrever em todo o trabalho devido à possibilidade de se esquecer nomes, isso não significa que pessoas não relacionadas nessa sessão não tenham contribuído, mas peço desculpas antecipadas para aqueles que por ventura não sejam citados aqui.

Agradeço a todo o corpo docente da UFF e do Lagemar, principalmente aqueles que foram meus professores. Principalmente ao meu orientador e amigo Marco Antonio Cetale Santos.

Agradeço aos alunos de mestrado e doutorado Kristoffer Hallam e Samuel Silva que andaram comigo boa parte desse caminho.

Agradeço também minha família que me criou desde pequeno, me apoiou nas horas de maior dificuldade tanto na vida particular, quanto na vida acadêmica e profissional. Aqui entra os agradecimentos de meus amigos de infância, adolescência e vida adulta, que por ser uma lista grande e para também não cometer injustiças não irei cita-los.

Gostaria de também agradecer a CAPES e a UFF pelo suporte financeiro e infraestrutura.

1 *Introdução*

A exploração de novas acumulações de hidrocarbonetos e o desenvolvimento das jazidas já conhecidas e mapeadas dependem de um conhecimento cada vez mais amplo da geologia em sub-superfície. Essas informações só podem ser adquiridas diretamente através de poços. Porém é economicamente inviável a perfuração de diversos poços, principalmente em regiões de águas profundas. Dessa forma, buscase formas indiretas, as quais incluem, principalmente, a sísmica. Tal método consiste na propagação de ondas mecânicas proveniente de uma fonte controlada (canhões de ar, dinamites, testes nucleares e etc) ou natural (terremotos, vulcões e etc). A energia se propaga através das camadas geológicas e pode ser registrada em receptores.

Os dados oriundos do campo necessitam de um tratamento de dados para estar pronto para interpretação. Usualmente esse tratamento de dados, denominado processamento sísmico, resulta em uma seção sísmica em tempo. Entretanto tais seções em tempo nem sempre são suficientes para um mapeamento de qualidade da região a ser explorada, já que podem ocorrer distorções da geometria das estruturas no domínio do tempo, principalmente em regiões de complexidade geológica, tais como estruturas associadas a evaporitos. Uma possível solução para esse problema é a seção sísmica migrada em profundidade, que é capaz de posicionar os refletores em suas posições corretas no domínio da profundidade. Porém para tal, é necessário um bom campo de velocidades, pois caso as velocidades estimadas possuam muitos erros, os refletores serão posicionados nos lugares errados e comprometer a interpretação dos dados. Além de ser necessária na migração sísmica, o conhecimento das velocidades em conjunto com outras propriedades da rocha podem ajudar a inferir a litologia e características petrofísicas das rochas, o que torna a etapa de análise de velocidades ainda mais importante.

Para se estimar as velocidades de propagação das ondas sísmicas em sub-superfície diversas técnicas e processos foram propostos ao longo das últimas décadas. A técnica padrão para a análise de velocidades é através da inversão de Dix (1955), que

estima as velocidades de propagação de ondas sísmicas utilizando apenas as informações dos receptores localizados na superfície.

Após a publicação do trabalho de Dix, diversos autores realizaram trabalhos testando a eficiência do método em diversas situações geológicas. Mesmo sendo baseada nos conceitos de ponto médio comum (*common mid point*, CMP), a inversão de Dix pode obter resultados satisfatórios para camadas pouco inclinadas e que apresentem pouca variação de velocidade. Desses estudos da eficiência da inversão de Dix ressalta-se o trabalho de Blackburn (1980) que é uma compilação dos erros gerados quando se usa a técnica de Dix em regiões de geologia complexa ou quando as premissas do CMP não são honradas.

Mesmo sendo a inversão de Dix uma técnica satisfatória em regiões de pouca complexidade estrutural, para se construir melhores modelos de velocidade, têm-se desenvolvido novas técnicas para superar os desafios impostos pela migração em profundidade e pela busca de novas jazidas de hidrocarbonetos em regiões com alta complexidade geológica. Essas técnicas incluem levantamentos sísmicos 3-D, integração entre os dados sísmicos e os dados de perfuração geofísica nos poços, novas técnicas e algoritmos de modelagem, migração, inversão e tomografia sísmica (Taratola, 1984), *Full Waveform Inversion* (Virieux e Operto, 2009), *Vertical Seismic Profile* (VSP) e outros. Destaca-se que a inversão de Dix continua sendo utilizada em grande escala devido a seus resultados satisfatórios e porque as técnicas mais avançadas ainda estão em desenvolvimento e possuem alto custo computacional.

A tomografia sísmica por tempo de trânsito é uma dessas técnicas posteriores a inversão de Dix e é o objeto de estudo desse trabalho. Diferentemente de outras técnicas, uma vantagem da tomografia é que esta não possui limitação em relação a complexidade geológica do meio estudado. Embora nesse trabalho apenas se utilizou nos exemplos a geometria de aquisição poço-a-poço, a tomografia pode ser utilizada em qualquer geometria, tais como superfície a superfície e VSP. Ressalta-se também que a tomografia sísmica por tempos de trânsito utiliza as ondas sísmicas refratadas, porém existem tomografias que utilizam as ondas refletidas (Bishop et al, 1985).

No Capítulo 2 será apresentado brevemente uma introdução da tomografia por tempos de trânsito de forma a contextualizar o problema. Serão discutidos o problema direto e o problema inverso, assim como uma solução para o problema inverso. Já a respeito do problema direto, serão apresentadas e discutidas algumas técnicas de modelagem sísmica através de traçado de raios e a justificativa para se utilizar uma

técnica de traçado de raios em particular.

Já no Capítulo 3 será apresentado um resumo da teoria geral da inversão, incluindo a formulação matemática do problema inverso e a inversão linear e não-linear. Também será descrito as dificuldades existentes na resolução do problema e possíveis soluções.

O Capítulo 4 é composto da metodologia empregada nos testes realizados com a tomografia sísmica por tempos de trânsito. Será descrita as estratégias utilizadas para abordar os problemas associados a tomografia por tempos de trânsito.

O Capítulo 5 apresenta exemplos e discussões relacionadas a aplicações da tomografia, buscando testar a influência de parâmetros iniciais, tais como o modelo inicial e a quantidade de parâmetros, na solução final do problema. E, finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões finais desse trabalho.

2 Tomografia por Tempos de Trânsito

Uma vez que a fonte sísmica é detonada, a energia (onda sísmica) liberada se propaga através do meio geológico. Essa propagação de energia não é instantânea, ou seja, a onda sísmica leva um tempo para se propagar através da distância entre a fonte e o receptor. Utilizando Física básica é possível calcular a velocidade média do meio caso a distância percorrida pela energia seja corrigida. Nesse caso, em particular, bastaria a divisão da distância pelo tempo de propagação da energia. Entretanto tal solução não é interessante do ponto de vista geofísico, pois busca-se exatamente as regiões de contrastes, que representam os contatos entre as camadas internas da Terra.

A vagarosidade (vagarosidade é o inverso da velocidade, é mais conveniente formular a inversão através da vagarosidade do que a velocidade) do meio depende dos parâmetros elásticos das rochas, de forma que diferentes rochas apresentarão velocidades de propagação diferentes. Sendo assim, pode ser interessante assumir que a vagarosidade pode ser uma função da posição ou que a região estudada pode ser dividida em blocos cuja a velocidade de propagação no interior de cada bloco individual é constante. Do ponto de vista de formulação matemática a forma que o modelo é representado não é relevante, pois este será descrito como um vetor de vagarosidades s pertencente a \mathbb{R}^n , onde n é número de parâmetros do modelo. No caso de um modelo representado por blocos de vagarosidade constante, n seria a quantidade de blocos em que o modelo foi dividido.

2.1 Problema Direto

O caminho percorrido pela onda entre a fonte e o receptor pode ser simplificado por um raio. O tempo de trânsito desse raio dependerá da trajetória e do campo de

vagarosidades e pode ser calculado através da seguinte equação:

$$t = \int_R s(\mathbf{x}) dl \quad (2.1)$$

Onde t é o tempo de trânsito, s é o campo de vagarosidades, \mathbf{x} é o vetor posição, dl é o comprimento infinitesimal do raio e R é o raio.

Se o raio for uma função conhecida, essa integral pode ser calculada através de algum método numérico, porém nem sempre será possível obter uma função analítica para a trajetória do raio. Alternativamente, pode-se calcular de forma aproximada os tempos de trânsito ao se realizar o somatório dos valores de vagarosidades nos pontos pertencentes ao raio. Entretanto, essa forma de calcular pode ser muito dependente da quantidade de pontos, pois se apenas poucos pontos fizerem parte do somatório a aproximação poderá ser pouco satisfatória.

O cálculo da integral na equação (2.1) pode ser simplificado dependendo do esquema de parametrização do modelo utilizado. Na Figura 1 é ilustrado um raio percorrendo o caminho da fonte até o receptor em um modelo de vagarosidades parametrizado com células homogêneas. Sendo i o índice do i -ésimo raio e j o índice da j -ésima célula e l_{ij} a distância percorrida pelo i -ésimo raio na j -ésima célula. Pode-se substituir a integral em (2.1) pelo seguinte somatório:

$$t_i = \sum_{j=1}^J l_{ij} s_j \quad (2.2)$$

Onde t_i é o tempo de trânsito do i -ésimo raio, s_j é a vagarosidade da j -ésima célula e l_{ij} é o comprimento do i -ésimo raio na j -ésima célula.

Dessa forma a equação (2.1) pode ser escrita na forma matricial como:

$$Ls = \mathbf{t} \quad (2.3)$$

Onde L é a matriz contendo os valores de l_{ij} , que é a distância percorrida pelo i -ésimo raio na j -ésima célula, s é o vetor coluna contendo os valores de vagarosidades s_j e \mathbf{t} é o vetor coluna contendo os valores de tempo t_i calculados para cada i -ésimo

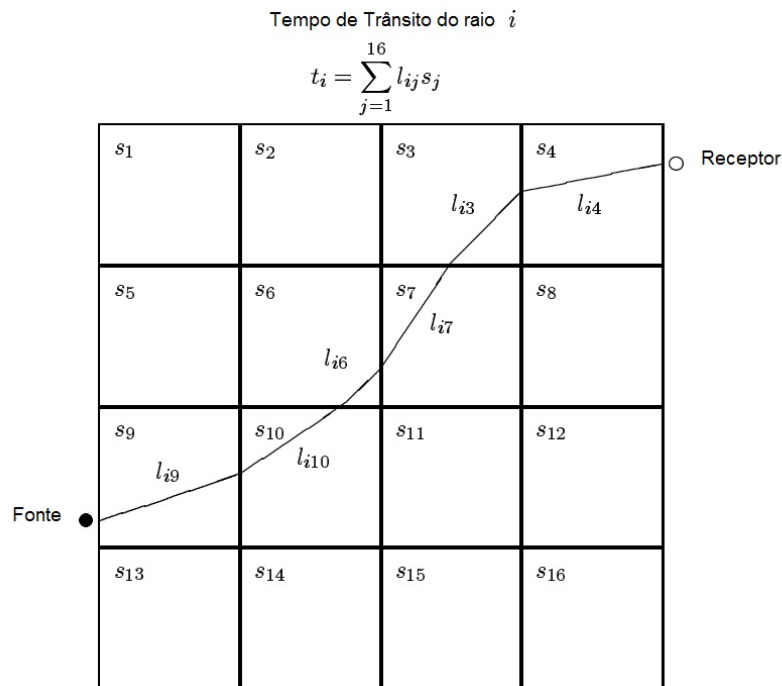


Figura 1: Ilustração demonstrando um raio percorrendo um modelo 2-D de células de vagarosidades homogêneas. Modificado de Berryman(1991)

raio.

A integral em (2.1) também pode ser simplificada quando se utiliza uma parametrização na qual há uma malha de pontos cujos os valores de vagarosidades são conhecidos, e os pontos fora desta malha são definidos através de algum esquema de interpolação. Ao se considerar que os pontos conhecidos pertencentes ao raio são ligados através de segmentos de retas e utilizando a equação da reta parametrizada, tem-se que:

$$x_{p+1} = x_p + \Delta x k \quad (2.4)$$

$$y_{p+1} = y_p + \Delta y k \quad (2.5)$$

Onde (x_{p+1}, y_{p+1}) e (x_p, y_p) são dois pontos consecutivos pertencentes ao raio, p é índice do ponto pertencente ao raio, k é o parâmetro que define a reta, Δx é a distância entre os pontos x_{p+1} e x_p na direção espacial x e Δy é a distância entre os pontos y_{p+1} e y_p na direção espacial y .

Ao se aplicar essa parametrização da reta na integral de linha da equação (2.1), o cálculo do tempo de trânsito para o raio percorrer de (x_p, y_p) até (x_{p+1}, y_{p+1}) será dado

por:

$$\Delta t_{p,p+1} = \int_0^1 s(x(k), y(k)) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} dk \quad (2.6)$$

E o tempo total percorrido pelo raio entre a fonte e o receptor será:

$$t = \sum_{p=1}^{P-1} \Delta t_{p,p+1} \quad (2.7)$$

Onde P é o número de pontos do raio.

2.2 Problema Inverso

No problema direto deseja-se obter t conhecendo-se L e s . Ou seja, os caminhos percorridos pelos raios são conhecidos, a velocidade do meio é conhecida e os tempos são as incógnitas. Já no problema inverso os tempos t são conhecidos e as vagarosidades s do meio são as incógnitas. Porém nem sempre a matriz L será conhecida, para se obter uma estimativa de L pode-se utilizar algoritmos de traçamento de raios. Um problema na estimativa de L é que o caminho percorrido pela energia depende da distribuição de vagarosidades do meio, o que torna o problema não-linear.

Caso a matriz L seja conhecida obtém-se um sistema linear. Tal sistema pode ser resolvido por mínimos quadrados. Dessa forma s pode ser definido como:

$$s = (L^T L)^{-1} L^T t, \quad (2.8)$$

onde $(\bullet)^T$ denota a matriz transposta.

2.3 Algoritmos de Traçamento de Raios

O traçado de raios tem como base os conceitos de energia cuja frequência é infinitamente alta e que estas seguem as equações do raio. Essas equações, tais como a Lei de Snell ou o princípio de Fermat, prevêem quando a energia se propaga na

mesma direção ou se a direção de propagação é alterada de acordo com a variação de velocidade do meio.

Durante a etapa da modelagem direta na tomografia sísmica, determina-se os tempos de trânsito entre a fonte e o receptor e também as trajetórias percorrida pelos raios. Também é levado em consideração o fato de as trajetórias não são simplesmente linhas retas entre a fonte e o receptor e sim curvas, uma vez que o campo de vagarosidades não é homogêneo.

Nessa seção serão apresentadas três técnicas de traçado de raios *raytracing*: métodos que utilizam a equação do raio (*shooting methods*); métodos que encurvam um raio inicial (*bending rays*) e métodos que utilizam a solução da equação Eikonal. Ressalta-se que a modelagem direta é a etapa que mais consome tempo computacional na tomografia sísmica. Torna-se, então, essencial a escolha de técnicas eficientes para o traçado de raios a fim de diminuir o tempo computacional.

2.3.1 Método utilizando a Equação do Raio

A base dos *shooting methods* é a equação do raio, dada por (Berryman 1991):

$$\nabla s = \frac{d}{dl} \left(s \frac{d}{dl} \mathbf{x} \right), \quad (2.9)$$

onde s é a vagarosidade do meio, l descreve o raio e \mathbf{x} é o vetor posição. Pode-se reescrever a equação (2.9) em termos do ângulo α , que para o caso de aplicações em 2-D fica da forma (Berryman,1991):

$$\frac{d\alpha}{dl} = \frac{1}{s} \left(\frac{\partial s}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial s}{\partial x} \sin\alpha \right) \quad (2.10)$$

A equação (2.10) pode ser resolvida numericamente através de algum esquema de diferenças finitas tal como descrita em Machado (2000), no qual o meio pode ser discretizado em células cujo os valores de vagarosidade sejam constantes dentro das células ou interpoladas de alguma forma. Sendo p_k uma posição e α_k um ângulo pertencentes ao raio, calcula-se o próximo ponto p_{k+1} e ângulo α_{k+1} pertencente ao raio através das seguintes equações (Machado, 2000):

$$x_{k+1} = x_k + \cos\alpha\Delta l + \frac{1}{2s(x_k, z_k)} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \Big|_{(x_k, z_k)} - f_k \cos\alpha \right) (\Delta l)^2, \quad (2.11)$$

$$z_{k+1} = z_k + \sin\alpha\Delta l + \frac{1}{2s(x_k, z_k)} \left(\frac{\partial s}{\partial z} \Big|_{(x_k, z_k)} - f_k \sin\alpha \right) (\Delta l)^2, \quad (2.12)$$

onde f_k é:

$$f_k = \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_{(x_k, z_k)} \cos\alpha + \frac{\partial s}{\partial z} \Big|_{(x_k, z_k)} \sin\alpha. \quad (2.13)$$

A maior dificuldade deste método é encontrar o ângulo inicial correto que unirá fonte e receptor. Porém há a possibilidade desse ângulo não existir, ou seja, não é possível através desse método unir fonte e receptor em um caminho percorrido por um raio. Assumindo que o raio exista, uma possível solução é traçar diversos raios em vários ângulos e ir estreitando o leque de ângulos até encontrar um raio que possa ser assumido como solução. Machado (2000) também descreve uma técnica para encontrar o ângulo inicial correto utilizando um algoritmo baseado no método de Newton-Raphson.

O *shooting method* é suficientemente acurado, mas devido a quantidade de raios que talvez sejam necessários serem traçados para se encontrar um que una a fonte ao receptor, ou até mesmo para se obter um certo grau satisfatório de precisão, torna-se muito caro computacionalmente. Ressalta-se que em tomografia sísmica poderá existir campos de vagarosidades nos quais são impossíveis de se traçar um raio que una a fonte ao receptor (Berryman, 1991). Esses casos podem ocorrer mesmo quando o campo de vagarosidade é suave ou quando se usa uma parametrização do modelo baseada em *splines* ou interpolações bilineares entre os pontos da malha (Vidale, 1988).

2.3.2 Métodos de Encurvamento do Raio Reto

Embora não seja tão acurado quanto o método que utiliza a equação do raio, o método de encurvar o raio é mais estável, sendo menos propenso a divergir mesmo quando os modelos de vagarosidades utilizados têm fortes contrastes ou que acarretam em zonas de pouca iluminação. Uma grande vantagem em relação ao *shooting method* é já existir um raio que una a fonte e o receptor, entretanto, ainda é necessário

encontrar o raio de menor tempo de trânsito.

Essa técnica começa com um raio inicial, provavelmente incorreto, e aplica-se uma perturbação a esse raio para curva-lo de modo a minimizar o tempo de trânsito. O *bending method* é baseado no princípio de Fermat e a minimização do tempo de trânsito é encontrada através do uso de algum algoritmo de otimização. Diversos autores propuseram métodos de traçado de raios por encurvamento do raio, e a maior parte se diferem pela técnica de otimização empregada ou na formulação matemática para minimizar o tempo.

Uma dessas técnicas é a de Prothero *et al* (1988), que desenvolveram uma técnica capaz de traçar os raios com uma rotina de busca baseada no algoritmo simplex proposto por Nelder e Mead (1965). Um outro exemplo é o de Um e Thurber (1987), que propuseram um método que busca minimizar o tempo de trânsito ao repartir o raio em várias partes e minimizar o tempo de cada parte individualmente. E ainda nesse mesmo contexto, um outro método importante é o proposto por Moser *et al* (1992), que busca a minimização através de gradientes conjugados.

Outro ponto que deve ser ressaltado a respeito do *bending* é a dependência do raio inicial. Más escolhas podem levar o algoritmo de otimização convergir para um mínimo local e o raio obtido não será o de menor tempo de trânsito como declara o princípio de Fermat. Uma forma de estimar o raio inicial na geometria poço-a-poço é traçar um raio reto que una fonte e receptor.

De modo geral os métodos tipo *bending* funcionam muito bem e convergem de forma rápida quando as premissas do raio são respeitadas. Métodos como o de Um e Thurber (1987) e Moser *et al* (1992) não funcionam muito bem quando há presença de regiões com gradientes de velocidade nulos, ou seja, grandes camadas de velocidade constante. Já o método de Prothero *et al* é mais estável na presença de contrastes de velocidades abruptos ou camadas homogêneas, mas mesmo assim é possível falhar em encontrar o menor tempo de trânsito.

Nessa seção serão mostradas duas técnicas do tipo *bending*, embora na seção de exemplos e comparações apenas o método de Prothero *et al* tenha sido utilizado.

2.3.2.1 Método de Prothero *et al* (1988)

Embora o artigo original de Prothero *et al* (1988) tratar também a respeito do caso 3-D, para fins de explanação nesta dissertação de mestrado apenas será contemplado

o caso em 2-D.

Sendo (x_S, z_S) e (x_R, z_R) respectivamente posições x e z da fonte e receptor. Procura-se o raio cujo caminho tem o menor tempo de trânsito. Para simplificar a notação pode-se assumir que $x_S = 0$ e $x_R = L$ e que o raio inicial que liga fonte a receptor é uma linha reta da forma:

$$z_0(x) = z_S \left(1 - \frac{x}{L}\right) + z_R \frac{x}{L} \quad (2.14)$$

A perturbação imposta no raio $\delta z(x)$ tem a forma da seguinte série harmônica:

$$\delta z(x) = \sum_{k=1}^K a_k \text{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right), \quad (2.15)$$

e calcule-se o tempo de trânsito do raio pela seguinte equação:

$$t = \int_0^L s(x, z) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx. \quad (2.16)$$

Salienta-se que apenas funções senos são utilizadas e não cossenos. Dessa forma, a posição inicial e nem a posição final do raio será modificada ao se impor a perturbação. Outro fator importante que deve ser levado em consideração é que nem sempre uma linha reta unindo fonte e receptor é o melhor raio inicial. Embora Prothero *et al* (1988) tenham proposto um esquema de busca para o raio inicial, no contexto de sísmica com geometria poço-a-poço a utilização de uma linha reta como raio inicial mostrou-se uma aproximação suficientemente satisfatória.

O método consiste em procurar os coeficientes a_k tais que irão minimizar o tempo de trânsito descrito pela equação (2.16). O procedimento de busca desenvolvido por Nelder e Mead (1965) utilizado no trabalho de Prothero *et al* (1988) baseia-se no conceito de simplex, que é um polítopo de $N + 1$ vértices em N dimensões. No caso 2-D o simplex é um triângulo, enquanto que no caso 3-D o simplex é uma pirâmide.

A idéia é realizar uma seqüência de operações no simplex de modo que seus vértices converjam para o mínimo da função, que nesse problema é a equação (2.16). Primeiramente é necessário escolher os coeficientes a_k iniciais e calcular o tempo de

trânsito $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n$, onde n é o número de harmônicos utilizados. Seis etapas devem ser testadas a cada iteração, que serão explanadas a seguir:

1- Ordenar os tempos do menor para o maior. $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Onde t_0 é associado ao ponto de menor tempo e t_n associa-se ao ponto de maior tempo.

2- Calcular o centro de gravidade a_o com todos os pontos, excetuando-se o ponto que possuir o maior tempo.

3- Calcular o ponto refletido a_r tal que: $a_r = a_o + \beta (a_o - a_n)$. Se t_r for maior que t_0 , mas menor que t_{n-1} , cria-se um novo simplex inserindo o ponto a_r e descartando o ponto a_n . Retornar a etapa 1.

4- Se o ponto refletido a_r for melhor que todos os outros, ou seja, $t_r < t_0$. Calcula-se o ponto expandido a_e tal que $a_e = a_o + \gamma (a_o - a_n)$. Se $t_e < t_r$, constrói-se um novo simplex utilizando o ponto expandido a_e e removendo o ponto a_n . Caso $t_r < t_e$, então obtém-se um novo simplex removendo o pior ponto a_n e adicionando o ponto refletido a_r . Retornar ao passo 1.

5- Se as etapas 3 e 4 não foram suficientes para definir o novo simplex, então calcula-se o ponto contraído a_c tal que: $a_c = a_o + \lambda (a_o - a_n)$. Se o $t_c < t_n$, então obtém-se um novo simplex descartando o pior ponto e adicionando o ponto a_c . Caso $t_n < t_c$, então é necessário ir para a etapa 6.

6- Exceto para o ponto associado a t_1 , calcular novos pontos tais que $a_i = a_1 + \sigma (a_i - a_1)$ para todo $i \in \{2, 3, \dots, n-1, n\}$. Retornar ao passo 1.

Os escalares β, γ, λ e σ são arbitrários. Nesse trabalho foram utilizados os valores de $\beta = 1; \gamma = 2; \lambda = 1/2$ e $\sigma = 1/2$. Esses escalares representam o quanto a posição de busca da iteração seguinte será influenciada pela presente. Valores muito baixos aumentam a chance de cair num mínimo local enquanto que valores muito elevados tendem a resultar a buscas que fogem da solução.

Vale ressaltar que a escolha dos pontos iniciais deve ser criteriosa para não levar a resultados tendenciosos ou a resultados que não sejam o mínimo global. Uma forma de evitar resultados tendenciosos é incluir a origem em um dos pontos, por exemplo $a_1 = (0, 0)$ para o caso em \mathbb{R}^2 .

2.3.2.2 Método de Um e Thurber (1987)

Essa equação do cálculo do tempo de trânsito (2.1) pode ser reescrita utilizando a regra do trapézio:

$$T = \sum_{k=2}^n |X_k - X_{k-1}| (1/V_k + 1/V_{k-1}) / 2 \quad (2.17)$$

Onde X_k e V_k são a posição e a velocidade no k -ésimo ponto do raio, respectivamente. Caso se tente minimizar o tempo aplicando perturbações em todos os pontos do raio ao mesmo tempo, essa minimização resultará em um grande sistema de equações não-lineares. Para evitar esse tipo de cálculo, Um e Thurber (1987) utilizam um esquema que minimiza o tempo de trânsito a cada três pontos consecutivos.

Sendo X_{k-1} , X_k e X_{k+1} três pontos consecutivos do raio, deseja-se encontrar uma nova posição para X_k que diminuirá o tempo de trânsito de todo o raio. Para se encontrar a nova posição é necessário saber para que direção n e com que intensidade R o ponto X_k será deslocado.

A direção n é dada por:

$$n = \frac{n'}{|n'|}, \quad (2.18)$$

onde n' é igual a:

$$n' = \nabla V - [\nabla V \cdot (X_{k+1} - X_{k-1})] \frac{(X_{k+1} - X_{k-1})}{|X_{k+1} - X_{k-1}|^2}, \quad (2.19)$$

e o deslocamento R na direção n é:

$$R = \frac{-(cV_k + 1)}{4cn \cdot \nabla V_k} + \left[\left(\frac{cV_k + 1}{4cn \cdot \nabla V_k} \right)^2 + \frac{L^2}{2cV_k} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

L é:

$$L = |X_{k+1} - X_{k-1}|, \quad (2.21)$$

e c é dado por:

$$c = \frac{\left(\frac{1}{V_{k+1}} - \frac{1}{V_{k-1}}\right)}{2}. \quad (2.22)$$

O cálculo da nova posição deve ser aplicado a todos os pontos do raio, exceto os pontos que estão localizados na fonte e no receptor. Após minimizar o tempo através desse esquema no raio inteiro, sugere-se que se aumente o número de pontos e continue o algoritmo até que o grau de precisão tenha sido alcançado.

2.3.3 Método baseado na Equação Eikonal

A equação escalar da onda é dada por:

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) = s^2(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (2.23)$$

Onde $\Psi(\mathbf{x}, t)$ é o campo de onda, $s(\mathbf{x})$ é o campo de vagarosidades, \mathbf{x} é o vetor posição e t é o tempo.

Assumindo que:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = e^{i\omega[\phi(\mathbf{x}) - t]} \quad (2.24)$$

Onde i é $\sqrt{-1}$ e ω é a frequência. Para facilitar a notação, define-se $u(\mathbf{x}, t)$ de modo que:

$$u(\mathbf{x}, t) = i\omega(\phi(\mathbf{x}) - t) \quad (2.25)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = i\omega\phi(\mathbf{x}) - i\omega t \quad (2.26)$$

Dessa forma, $\Psi(\mathbf{x}, t)$ é reescrito como:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = e^{u(\mathbf{x}, t)} \quad (2.27)$$

E as derivadas parciais podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = i\omega \frac{\partial^n \phi(x)}{\partial x^n} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = e^u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = e^u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + e^u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.30)$$

Substituindo, têm-se que:

$$\nabla^2 \Psi = -\omega^2 \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}) e^{i\omega(\phi(\mathbf{x})-t)} + i\omega \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) e^{i\omega(\phi(\mathbf{x})-t)} \quad (2.31)$$

E se também for aplicado a relação da equação (2.24) em (2.31), se obtém:

$$\nabla^2 \Psi = -\omega^2 \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}, t) + i\omega \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.32)$$

As derivadas parciais em relação ao tempo são:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = e^u \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + e^u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.33)$$

Só que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.34)$$

E então:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{i\omega(\phi(\mathbf{x})-t)} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.36)$$

Substituindo (2.32) e (2.36) na equação escalar da onda (2.23):

$$-\omega^2 \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}, t) + i\omega \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}, t) = -s^2(\mathbf{x}) \omega^2 \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.37)$$

Reorganizando e colocando Ψ em evidência:

$$\left[i\omega \nabla^2 \phi - \omega^2 \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \omega^2 s^2(\mathbf{x}) \right] \Psi = 0 \quad (2.38)$$

Multiplicando todos os termos da equação por ω^{-2} e aplicando o limite $\omega \rightarrow \infty$, o termo $i\omega \nabla^2 \phi$ tenderá a zero. Resultando em:

$$s^2(\mathbf{x}) = (\nabla \phi)^2 \quad (2.39)$$

Que é a equação Eikonal. Ao se solucionar essa equação, a função ϕ representará o tempo de trânsito em cada ponto do espaço.

Vidale (1988) desenvolveu um algoritmo baseado em diferenças finitas que encontra uma solução aproximada da equação (2.39). Podvin e Lecomte (1991) publicaram um trabalho onde a proposta inicialmente apresentada por Vidale possa ser utilizado de forma mais abrangente, tais como variações abruptas de velocidade, e abordando computação em paralelo.

A Figura 2 representa esquema de diferenças finitas utilizado para duas dimensões. As células contém os valores de vagarosidades constantes, o ponto P (branco) é o ponto cujo tempo de trânsito se deseja calcular e os pontos pretos são seus vizinhos. Para se determinar se o valor de tempo atribuído ao ponto irá ser modificado é necessária a verificação de três tipos distintos de frente de onda: transmissão 1-D; transmissão 2-D e difração.

Considerando os pontos S e SO da Figura 2, uma onda plana que atravessa a interface $S - SO$, o ponto P , h sendo o espaçamento entre os pontos da malha e s a vagarosidade na célula formada pelos pontos SO , O , P , e S . O campo de tempo no ponto S referente a transmissão 2-D será dada por:

$$t_P = t_S + \sqrt{(hs)^2 - (t_S - t_{SO})^2} \quad (2.40)$$

Para a transmissão 1-D considera-se apenas dois pontos e as vagarosidades das células adjacentes. O valor de t no ponto P será:

$$t_P = t_O + h s \quad (2.41)$$

Ressalta-se que é necessário verificar o campo t no ponto P com as duas vagarosidades das células adjacentes a OP . Dessa forma sendo s e s' as vagarosidades das duas células adjacentes a OP . Assim t_P é dado por:

$$t_P = t_O + h \min(s, s') \quad (2.42)$$

Para o cálculo do tempo por difração utiliza-se o principio de Huygens, o qual considera que cada ponto em um campo de onda se comporta como uma nova fonte de frente de onda. Assim, considerando o ponto SO um ponto difrator e P sendo o ponto desejado para se calcular o tempo, t_P será:

$$t_P = t_{SO} + h s \sqrt{2} \quad (2.43)$$

Salienta-se que apenas é necessário realizar o cálculo da difração na diagonal, pois o cálculo do tempo referente a difração dos pontos localizados na vertical e horizontal já foram contemplados na etapa de transmissão 1-D.

Em suma, para o caso 2-D, serão necessários para cada ponto da malha calcular

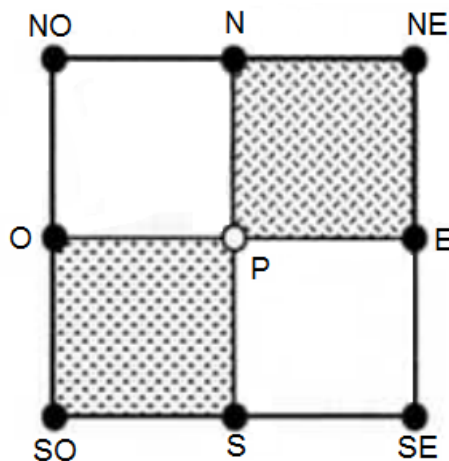


Figura 2: No contexto 2-D o ponto a ser calculado (em cor branca) depende dos tempos de seus vizinhos (em cores pretas). Adaptado de Podvin e Lecomte (1991).

em cada iteração: 4 transmissões 1-D referentes aos vizinhos N , L , O e S ; 8 transmissões 2-D referentes aos pares de pontos NO , NE , SO e SE , sendo que ambos os sentidos para cada par devem ser verificados e 4 difrações referentes aos vizinhos NO , NE , SO e SE . O valor que será atribuído ao ponto no fim das verificações é o menor valor de todos os três tipos de chegada de onda, salvo, quando o valor atual do ponto já é menor do que qualquer outro calculado.

Para inicialização do algoritmo é necessária que toda a malha comece com valores de tempo infinito e a fonte deve ser designada com tempo igual a zero. Como critério de parada pode-se considerar que o algoritmo terminou os cálculos quando nenhum ponto é mais alterado. O resultado ao término do algoritmo é um campo que representa o tempo de trânsito da onda a partir da fonte para qualquer ponto da malha.

Para traçar os raios será necessário seguir o gradiente descendente a partir do receptor até a fonte. Assim como no *shooting method* pode-se utilizar um esquema de diferenças finitas a fim de calcular o próximo ponto pertencente ao raio a partir de um ponto conhecido que seja pertencente ao raio, assim, tem-se como começo do raio o receptor e como final a fonte.

2.3.4 Comparações e Exemplos

O traçado de raios é uma etapa necessária para se calcular os tempos de trânsito e a trajetória dos raios a cada iteração da tomografia. Essa também é a etapa que mais consome tempo computacional. E além disso, se as trajetórias dos raios não forem bem definidas, talvez nunca seja possível encontrar uma solução satisfatória para a inversão.

Existem muito mais técnicas de traçado de raios do que foram explanadas nesse capítulo. Trabalhos como o de Cerveny (2001) compilam e abordam diversas técnicas de *raytracing*. Cada método e algoritmo possui suas vantagens e desvantagens e essa seção tem como objetivo justificar o uso de uma técnica em particular.

As técnicas do tipo *shooting* são baseadas nas equações do raio, que por sua vez são baseadas em aproximações assintóticas da equação da onda. Os raios traçados por *shooting* se comportam bem em modelos suaves e com poucas variações de velocidade, não sendo muito custoso encontrar um ângulo para um raio que termine muito próximo do receptor. Porém as equações do raio prevêm apenas a transmissão da energia (Moser *et al*, 1992), e se a primeira chegada for de uma onda difratada, esta

é a que será observada no experimento físico. Situações nas quais os receptores se encontram em regiões de baixa velocidade ou zonas de sombra prejudicam a eficiência de métodos tipo *shooting*, e talvez seja necessário o cálculo de muitos raios até que se encontre um ângulo que resulte em um raio aceito como solução.

Os métodos que encurvam o raio tem a vantagem de não possuírem esses problemas supracitados. Duas vantagens é a previsão de chegadas por ondas difratadas e a existência de um raio que conecte fonte e receptor. Entretanto, se o método de otimização convergir para um mínimo local o raio encontrado não é o de tempo mínimo. Métodos como o de Um e Thurber (1987) tendem a não funcionar muito bem na presença de contrastes fortes de vagarosidades ou regiões gradiente de velocidade nulo. Já o método proposto por Prothero *et al* (1988) se comporta melhor nessas situações, mas por ser um somatório de harmônicos, poderá resultar em raios que possuem boa precisão no cálculo de tempo, mas as trajetórias não possuem sentido físico. Para contornar essas trajetórias sem sentido físico pode-se adicionar mais harmônicos ao método, porém isso aumenta o custo computacional. Os métodos *bending*, de maneira geral, se comportam muito bem e, provavelmente, irão gerar resultados satisfatórios em modelos de velocidade suaves.

O método de Podvin e Lecomte (1991) para a solução aproximada da equação Eikonal funciona muito bem para modelos que não são suaves e que possuem regiões com fortes contrastes de velocidade. A principal desvantagem é o custo computacional. Como alternativa pode-se aumentar o espaçamento entre os pontos da malha para diminuir o tempo de processamento, porém isso implica em uma imprecisão no cálculo dos tempos de trânsito. Outra vantagem do método é a previsão de *headwaves*, que dificilmente os métodos tipo *bending* prevêm.

Os dois métodos utilizados nos testes são o *raytracing* tipo *bending* de Prothero *et al* (1988) e *raytracing* pela solução da equação Eikonal de Podvin e Lecomte (1991). Cinco modelos de velocidades distintos foram utilizados: um modelo homogêneo, um modelo gradiente vertical, um modelo com duas camadas, um modelo com três camadas e um gradiente interno e uma seção suavizada do modelo de Marmousi.

Em todos os testes a fonte está localizada na borda esquerda e na metade da distância vertical, enquanto que os receptores estão localizados na borda direita e distribuídos ao longo da distância vertical. Para se encontrar a solução correta do tempo de trânsito e comparar com o tempo obtido no *raytracing*, extrapolou-se o campo de ondas a partir da fonte por diferenças finitas e registrou-se um sismograma ao longo

de toda a borda direita, na posição onde estariam os receptores. A função fonte utilizada é uma Ricker com frequência de corte de 200Hz. As Figuras de número 3 a 7 ilustram o resultado dos testes. A explanação de como é feita a modelagem sísmica acústica pode ser consultada nos apêndices.

É possível notar que em todos os testes o tempo encontrado pela solução da Equação Eikonal coincide com o tempo registrado no sismograma sintético e o mesmo já não acontece com os tempos encontrados com o método do raio encurvado. Isso pode ser verificado principalmente na Figura 5 na qual além dos raios do *bending* não possuem um caminho com sentido físico coerente os tempos são ligeiramente diferentes dos registrados no sismograma e pela encontradas pela solução da Equação Eikonal.

Nos modelos das Figuras 3, 4 e 6 a diferença entre os tempos calculados pelos dois métodos de traçado de raios e o registrado pelo sismograma sintético é muito pequena, mostrando que o método do tipo *bending* tem um bom comportamento em modelos suaves ou com pouco contrastes de velocidades.

Optou-se, então, utilizar o *raytracing* pela Equação Eikonal na tomografia sísmica. Apesar de ser mais caro computacionalmente os tempos encontrados são mais acurados e também prevêem a existência de *headwaves*.

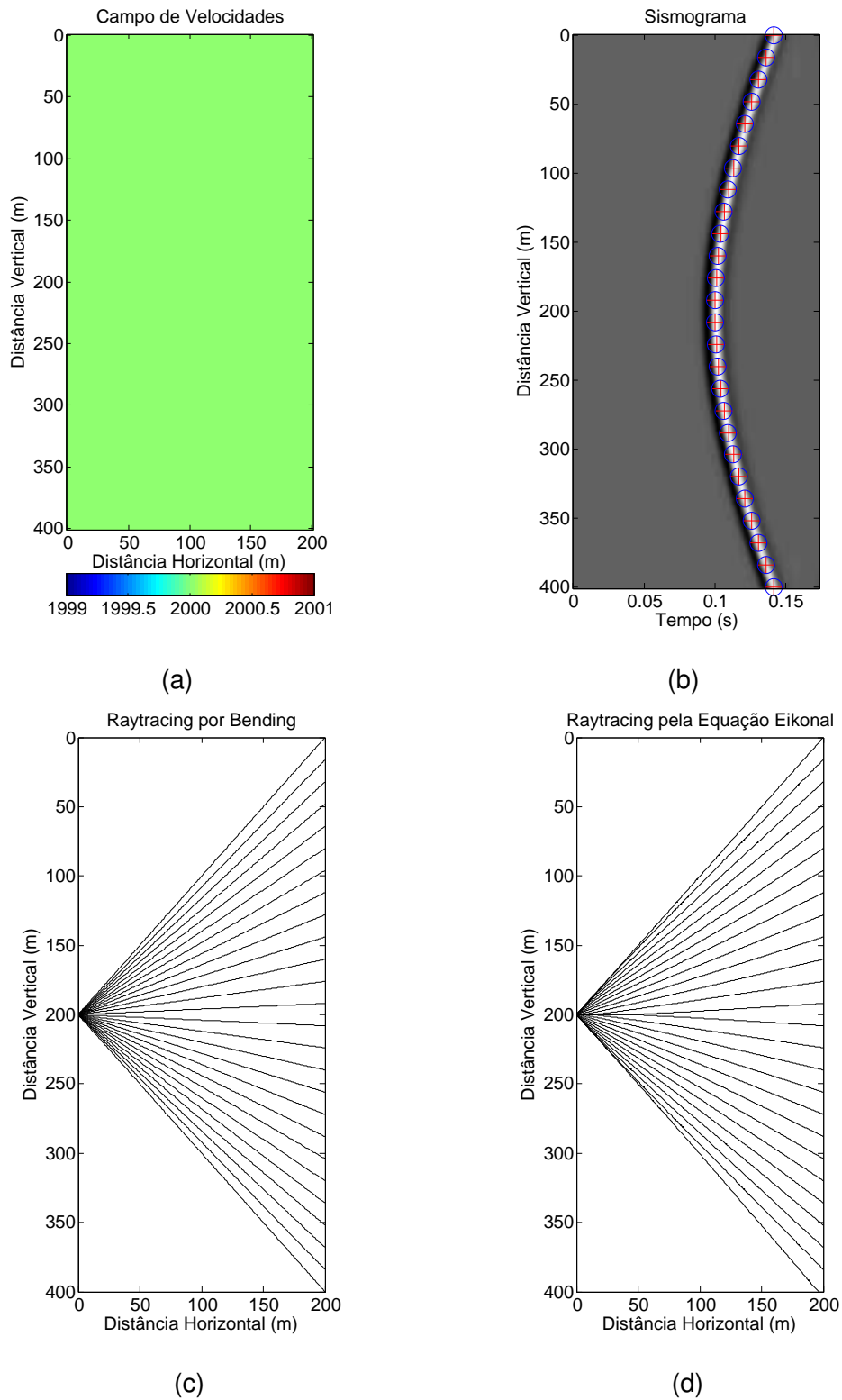


Figura 3: Teste do *raytracing* em um modelo homogêneo. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Tempos de trânsito em conjunto com o sismograma registrado pela modelagem sísmica por diferenças finitas onde o + vermelho é o tempo encontrado por *bending* e o círculo azul é o tempo encontrada pela solução da Equação Eikonal. (c) Traçado de raios por *bending*. (d) Traçado de raios utilizando a Equação Eikonal.

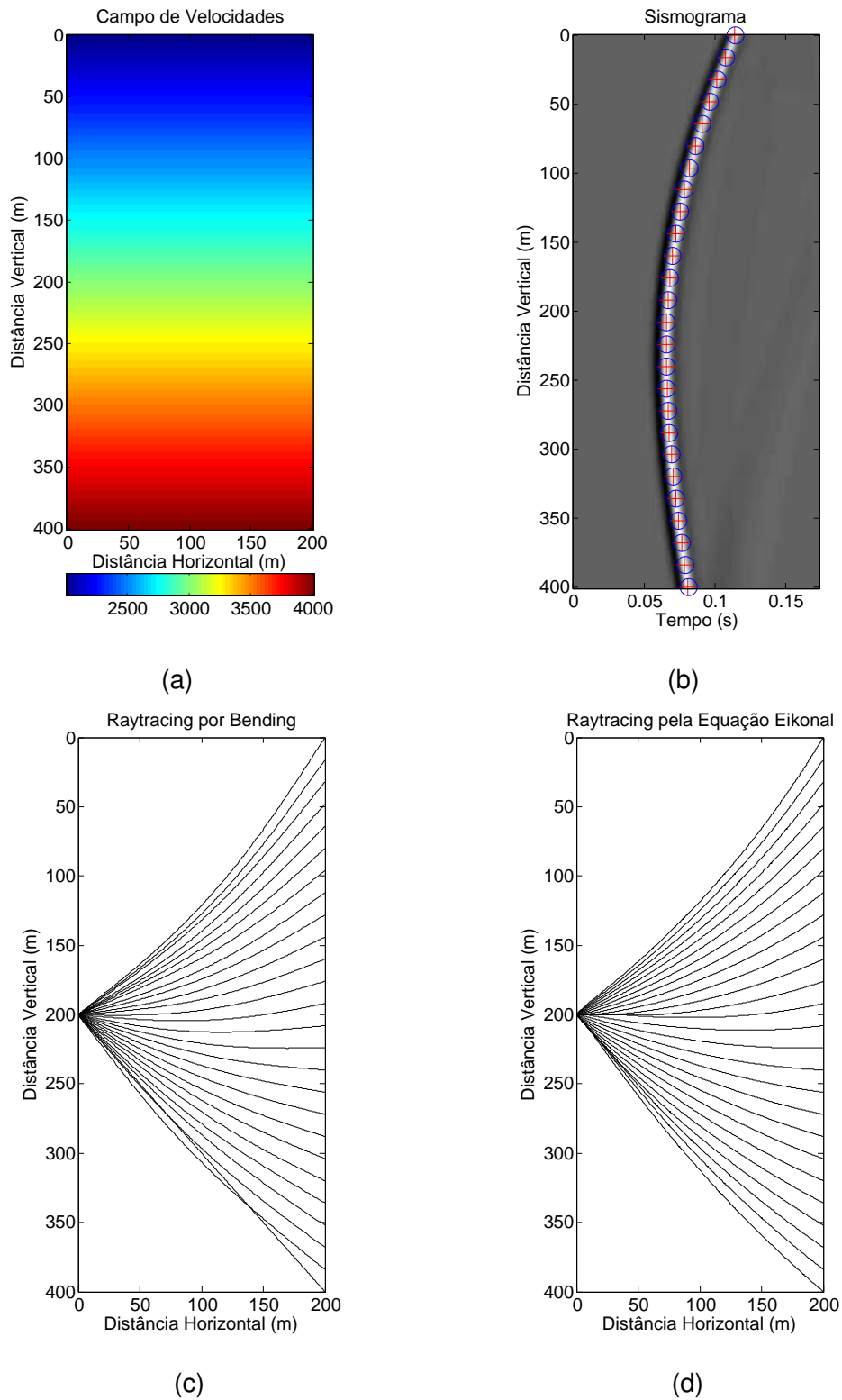


Figura 4: Teste do *raytracing* em um modelo gradiente vertical. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Tempos de trânsito em conjunto com o sismograma registrado pela modelagem sísmica por diferenças finitas onde o + vermelho é o tempo encontrado por *bending* e o círculo azul é o tempo encontrada pela solução da Equação Eikonal. (c) Traçado de raios por *bending*. (d) Traçado de raios utilizando a Equação Eikonal.

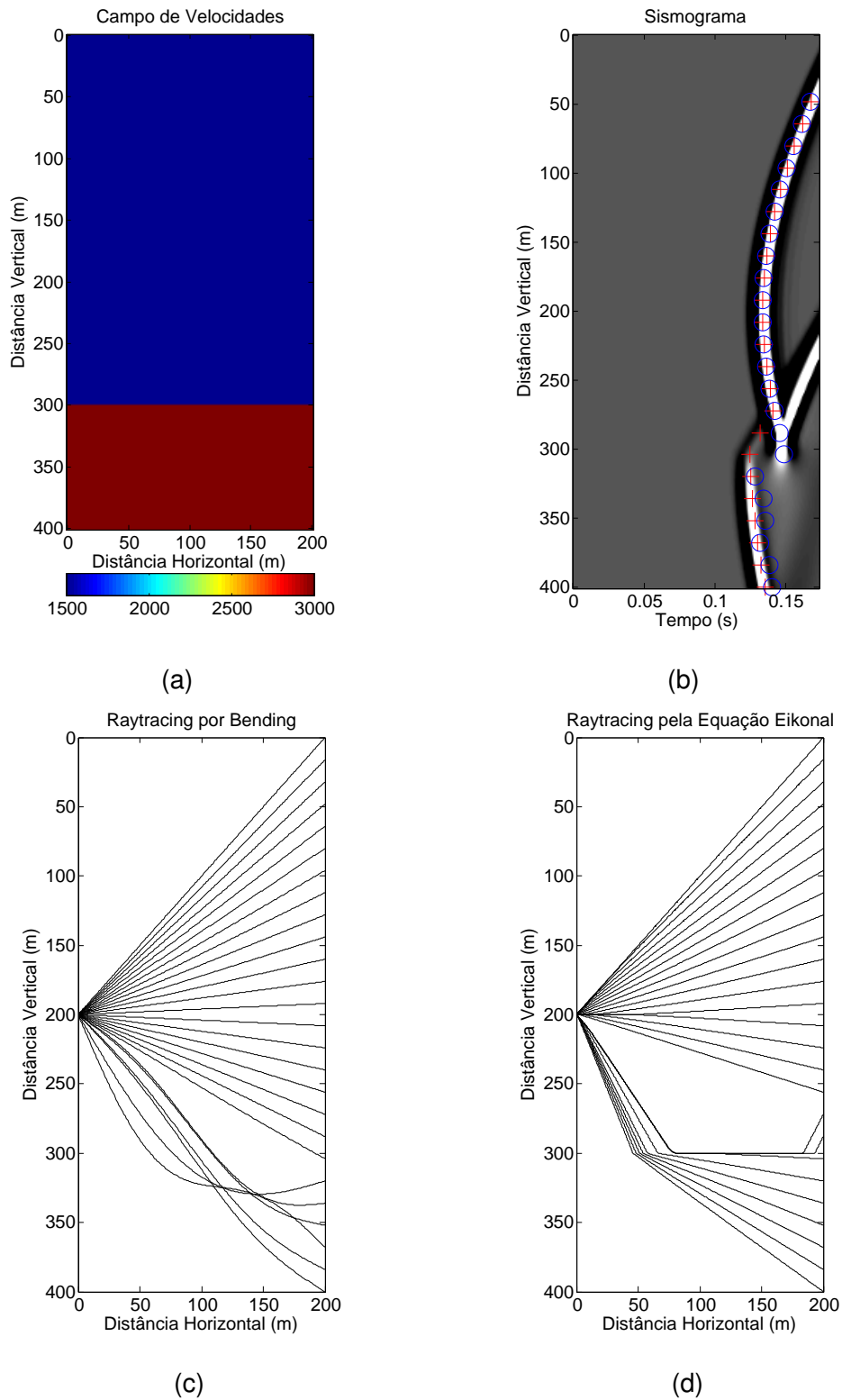


Figura 5: Teste do *raytracing* em um modelo de duas camadas. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Tempos de trânsito em conjunto com o sismograma registrado pela modelagem sísmica por diferenças finitas onde o + vermelho é o tempo encontrado por *bending* e o círculo azul é o tempo encontrada pela solução da Equação Eikonal. (c) Traçado de raios por *bending*. (d) Traçado de raios utilizando a Equação Eikonal.

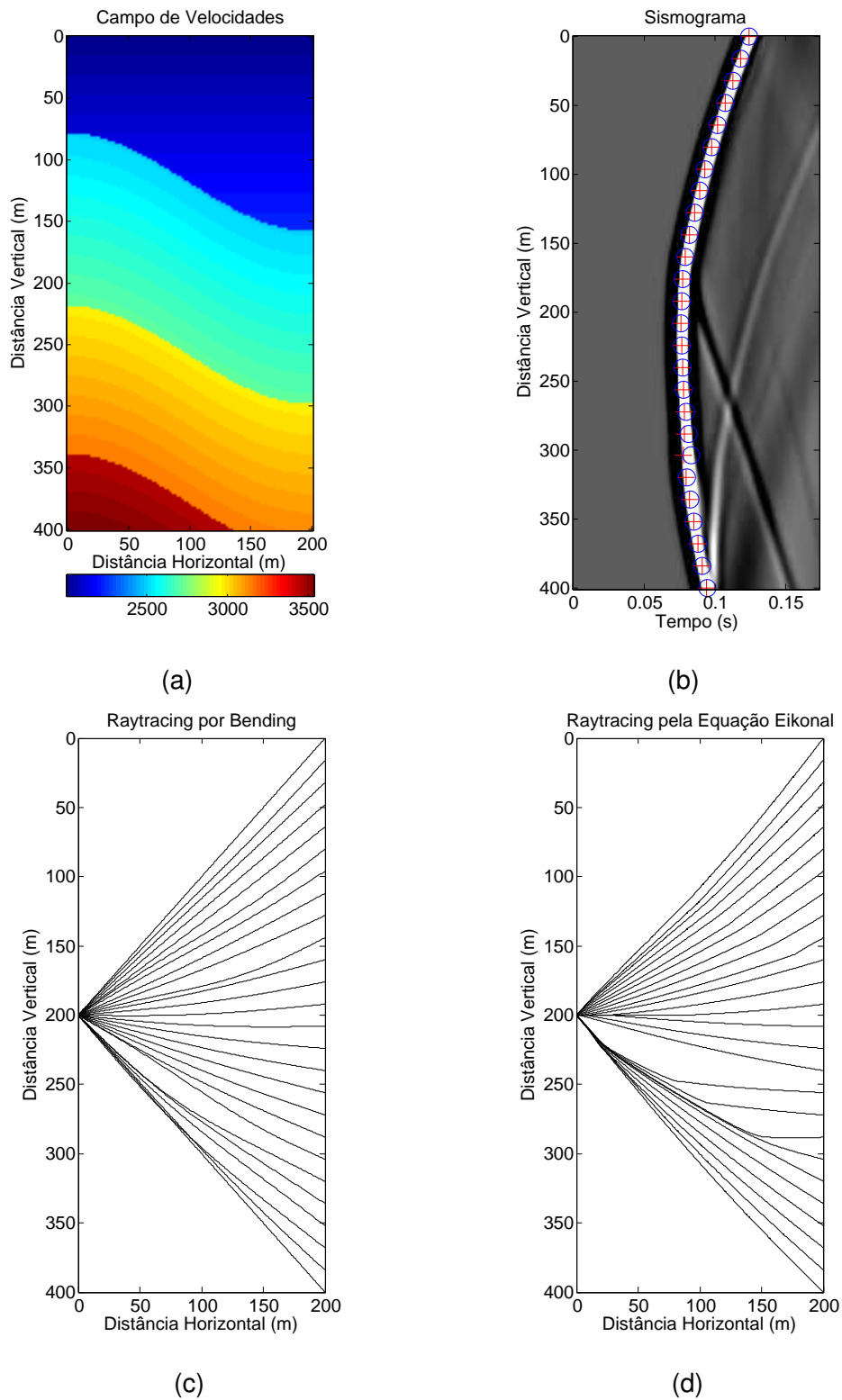


Figura 6: Teste do *raytracing* em um modelo com três camadas e um gradiente interno. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Tempos de trânsito em conjunto com o sismograma registrado pela modelagem sísmica por diferenças finitas onde o + vermelho é o tempo encontrado por *bending* e o círculo azul é o tempo encontrada pela solução da Equação Eikonal. (c) Traçado de raios por *bending*. (d) Traçado de raios utilizando a Equação Eikonal.

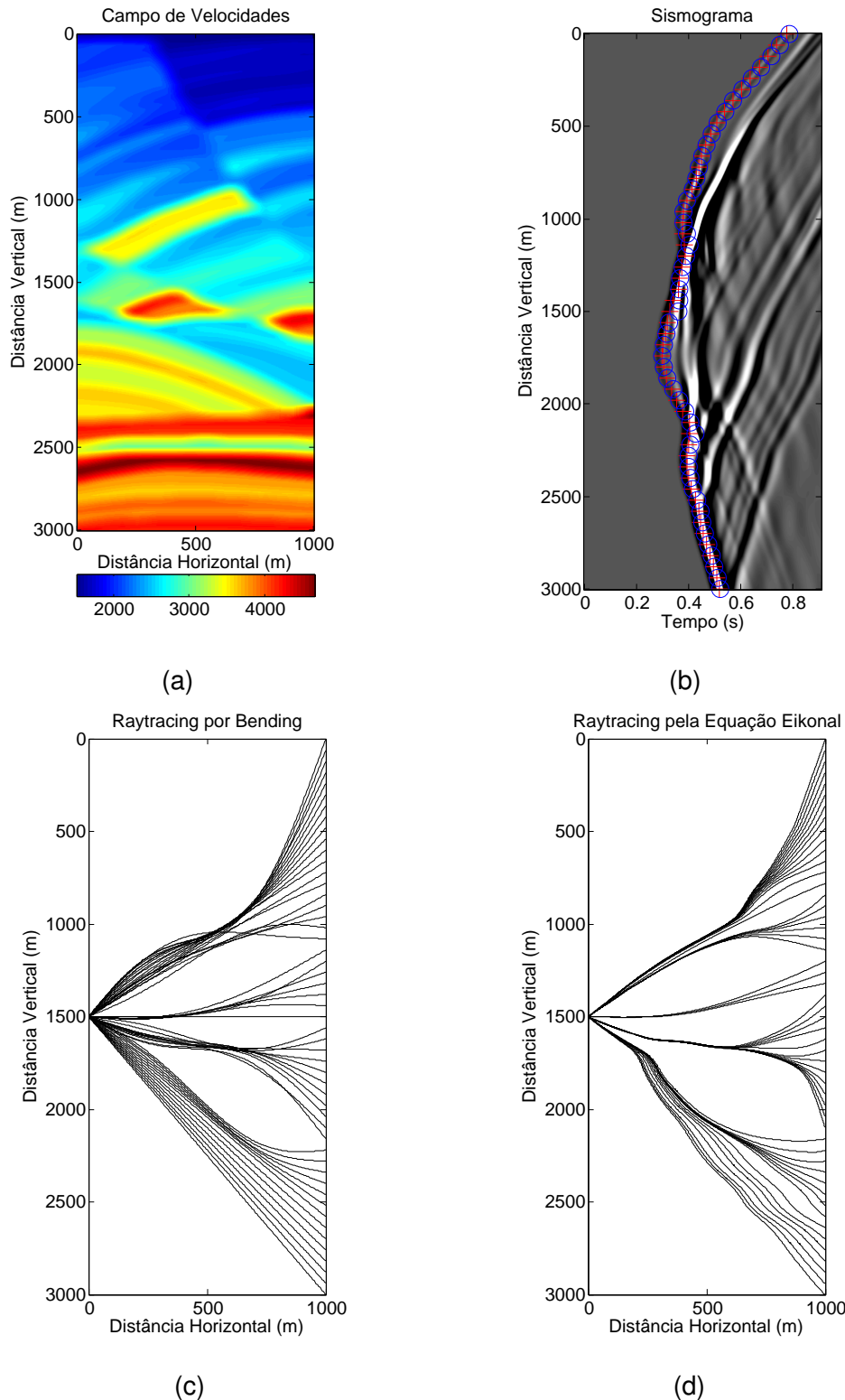


Figura 7: Teste do *raytracing* em uma seção suavizada do modelo de Marmousi. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Tempos de trânsito em conjunto com o sismograma registrado pela modelagem sísmica por diferenças finitas onde o + vermelho é o tempo encontrado por *bending* e o círculo azul é o tempo encontrada pela solução da Equação Eikonal. (c) Traçado de raios por *bending*. (d) Traçado de raios utilizando a Equação Eikonal.

3 *Teoria Geral da Inversão*

Pode-se representar um sistema natural através de um conjunto de parâmetros m e esse conjunto de parâmetros é denominado modelo. A Física e suas leis permitem a relação entre um modelo representado por m e um conjunto de dados observados d através de uma lei física g , que rege o fenômeno físico em questão. Pode-se expressar matematicamente essa relação através da seguinte equação:

$$g(m) = d \quad (3.1)$$

Chama-se problema direto quando g e m são conhecidos e deseja-se obter o d . Denomina-se problema inverso quando se deseja encontrar m que explique um conjunto de dados d e sabe-se que g é a lei que rege o fenômeno físico observado.

Para resolver o problema inverso diretamente é necessário definir o operador g^{-1} de modo que:

$$g^{-1}(d) = m \quad (3.2)$$

Onde $(\cdot)^{-1}$ significa operador inverso, ou seja, o operador inverso de g aplicado aos dados d retorna o conjunto de parâmetros m . Ressalta-se que nem sempre será viável, ou até mesmo possível, calcular g^{-1} . Uma rota alternativa ao cálculo do operador inverso é estimar um modelo m_{k+1} a partir de um modelo de referência m_k aplicando algum tipo de relação f . Assim:

$$m_{k+1} = f(m_k). \quad (3.3)$$

Espera-se que o novo modelo estimado m_{k+1} seja uma estimativa melhor que m_k , ou seja, a diferença entre o dado observado d^{obs} e o dado calculado d^{calc} irá ser mais próximo de zero para o modelo m_{k+1} do que para m_k . Dessa forma pode-se calcular m_{k+1} através de um processo de otimização que busca reduzir a diferença $\Delta d = d^{obs} - d^{calc}$, que é chamada na bibliografia de função erro, objetivo, custo ou energia. Sendo assim, a resolução do problema inverso torna-se um processo iterativo de otimização na qual a cada iteração o conjunto de parâmetros do modelo m_k são atualizados de modo a reduzir o valor da função erro, ou seja, o método busca reduzir a diferença entre o dado observado e o dado calculado a partir do modelo m_k .

A função erro pode ter como critério de minimização a norma L_p (Scales *et al*, 1988), dada por:

$$E(m) = |d^{obs} - d^{calc}|^p \quad (3.4)$$

Caso a função erro seja menor que uma tolerância, assume-se m_k como solução.

3.1 Inversão Linear

A inversão linear assume que os dados d dependem linearmente dos parâmetros do modelo. Pode-se reescrever a equação (3.1) como:

$$G\mathbf{m} = \mathbf{d} \quad (3.5)$$

Onde G é o operador linear que aplicado ao modelo m resulta em d . Sendo assim, para se resolver o problema inverso é necessário multiplicar G^{-1} a esquerda de ambos os lados da igualdade. Entretanto há três grandes dificuldade em se solucionar (3.5) dessa forma (Berryman, 1991). São elas:

- 1- A matriz G nem sempre é quadrada.
- 2- A matriz G nem sempre possui posto cheio.
- 3- A matriz G pode ser mal condicionada.

E devido a essas três dificuldades apresentadas nem sempre será possível em-

pregar o operador inverso G^{-1} , pois tal matriz inversa não existe.

3.1.1 Mínimos Quadrados

O método dos Mínimos Quadrados é bastante popular para a solução de problemas inversos devido a sua facilidade do ponto de vista computacional. Porém, este método tem como desvantagem a falta de robustez, sendo muito sensível a ruídos (Tarantola, 2005).

O método busca minimizar o quadrado da diferença entre $G\mathbf{m}$ e d . Para se formular matematicamente o método basta fazer $p = 2$ na equação (3.4) (Martins, 1992), resultando em:

$$E(\mathbf{m}) = \|\mathbf{d} - G\mathbf{m}\|^2, \quad (3.6)$$

que pode ser reescrito como:

$$E(\mathbf{m}) = (\mathbf{d} - G\mathbf{m})^T (\mathbf{d} - G\mathbf{m}) \quad (3.7)$$

onde $(\cdot)^T$ significa a matriz transposta. Para se encontrar \mathbf{m} que torne $E(\mathbf{m})$ mínimo, é necessário calcular a derivada de E e igualar a zero. Isso resulta em:

$$\frac{\partial E(\mathbf{m})}{\partial m_i} = 2 \left[G^T (\mathbf{d} - G\mathbf{m}) \right] = 0, \quad (3.8)$$

que equivale a:

$$G^T G\mathbf{m} = G^T \mathbf{d} \quad (3.9)$$

Que são chamadas de equações normais. A solução estimada de (3.9) é dada por:

$$\mathbf{m} \approx (G^T G)^{-1} G^T \mathbf{d} \quad (3.10)$$

Sendo que a inversa $(G^T G)^{-1}$ só irá existir se o determinante de $G^T G$ for $\neq 0$ e tiver posto cheio. Mesmo que esses requisitos sejam atendidos, a equação (3.10) poderá conduzir a soluções pouco satisfatórias se o seu número de condição, que é definido entre a relação de seu maior e menor autovalores, for muito grande (Martins, 1992).

3.1.2 Gradiente Conjugado Linear

O Gradiente Conjugado Linear foi inicialmente proposto por Hestenes e Stiefel (1952) como um método iterativo para encontrar a solução de sistemas lineares com matrizes positivas. O método é uma das técnicas mais úteis para solucionar grandes sistemas lineares (Nocedal e Wright, 2006) e várias modificações do esquema original foram propostas. As principais vantagens do método do Gradiente Conjugado em relação a outros métodos, tais como o gradiente descendente, são o menor consumo de memória e a rápida convergência. A descrição pormenorizada do método do Gradiente Conjugado e de seus teoremas podem ser encontrados em Nocedal e Wright (2006).

Supondo que G na equação (3.5) é uma matriz positiva e simétrica, ou seja $G^T = G$ e $\mathbf{m}^T G \mathbf{m} > 0$ para todo $\mathbf{m} \neq 0$. O problema expresso na Equação (3.5) pode ser posto de forma equivalente como o seguinte problema de minimização:

$$\min \phi(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \mathbf{m}^T G \mathbf{m} - \mathbf{d}^T \mathbf{m} \quad (3.11)$$

E também define-se o resíduo:

$$\mathbf{r}(\mathbf{m}) = G \mathbf{m} - \mathbf{d} = \nabla \phi(\mathbf{m}) \quad (3.12)$$

que para um determinado m_k será:

$$r_k = Gm_k - d_k. \quad (3.13)$$

Essa equivalência permite a interpretação de que o método dos Gradiente Conjugado Linear é um método tanto para solucionar sistemas lineares quanto para minimizar funções quadráticas. Dado um ponto $m_0 \in \mathbb{R}^n$ e um conjunto de direções conjugadas $\{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ gera-se a sequência m_k dada por:

$$m_{k+1} = m_k + \alpha_k p_k, \quad (3.14)$$

onde α_k minimiza a função quadrática ϕ ao longo de $m_k + \alpha p_k$. E α_k é definido como:

$$\alpha_k = -\frac{r_k^T p_k}{p_k^T G p_k}, \quad (3.15)$$

sendo que a direção p_k é definida como:

$$p_k = -r_k + \beta_k p_{k-1}, \quad (3.16)$$

onde β_k é determinado de tal forma que p_{k-1} e p_k sejam conjugados em relação a matriz G . A filosofia do método consiste em que a partir do último vetor de resíduos $r_k = Gm_k - d_k$ gerar uma sequência de direções ortogonais em relação a matriz G e em relação a todas as demais direções já utilizadas. Portanto, ao impor a condição de $p_{k-1}^T G p_k = 0$ e multiplicar (3.16) por p_{k-1}^T , define-se β_k como:

$$\beta_k = \frac{r_k^T G p_{k-1}}{p_{k-1}^T G p_{k-1}}. \quad (3.17)$$

De maneira geral o método realiza sucessivas minimizações unidimensionais ao longo de cada direção p_k (Nocedal e Wright, 2006). Pode-se, então, determinar o seguinte algoritmo:

Dado \mathbf{m}_0 ;

Defina $\mathbf{r}_0 \leftarrow G\mathbf{m}_0 - \mathbf{d}$, $\mathbf{p}_0 \leftarrow -\mathbf{r}_0$, $k \leftarrow 0$;

Enquanto $|r_k| > \text{tolerancia}$, faça

$$\alpha_k \leftarrow -\frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T G \mathbf{p}_k}; \quad (3.18a)$$

$$\mathbf{m}_{k+1} \leftarrow \mathbf{m}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k; \quad (3.18b)$$

$$\mathbf{r}_{k+1} \leftarrow \mathbf{r}_k + \alpha_k G \mathbf{p}_k; \quad (3.18c)$$

$$\beta_{k+1} \leftarrow \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}; \quad (3.18d)$$

$$\mathbf{p}_{k+1} \leftarrow -\mathbf{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \mathbf{p}_k; \quad (3.18e)$$

$$k \leftarrow k + 1; \quad (3.18f)$$

Fim do faça

3.2 Inversão Não-Linear

3.2.1 Inversão Linearizada

Caso o operador g não seja linear e a não-linearidade não for muito forte, pode-se assumir que nas vizinhanças de \mathbf{m} a relação entre \mathbf{d} e \mathbf{m} é linear. Ao se utilizar essa aproximação, pode-se expressar \mathbf{m} como uma combinação linear do modelo de referência \mathbf{m}_k e um modelo perturbado $\Delta\mathbf{m}$. Essa combinação linear pode ser expressa matematicamente por:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m} \quad (3.19)$$

Expandindo $g(\mathbf{m})$ em séries de Taylor tem-se:

$$g(\mathbf{m}) = g(\mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m}) = g(\mathbf{m}_0) + \left. \frac{\partial g(\mathbf{m})}{\partial m_i} \right|_{\mathbf{m}_0} \Delta\mathbf{m} + O(\mathbf{m}) \quad (3.20)$$

Aplicando a relação entre o dado e o modelo $\mathbf{d} = g(\mathbf{m})$:

$$g(\mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m}) = \mathbf{d}. \quad (3.21)$$

E sabendo que $\Delta\mathbf{d} = \mathbf{d} - \mathbf{d}_0$, onde d_0 é o dado calculado utilizando o modelo \mathbf{m}_0 , ou seja, $\mathbf{d}_0 = g(\mathbf{m}_0)$. Ao se desprezar os termos de ordens superiores $O(m)$, obtém-se:

$$g(\mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m}) - g(\mathbf{m}_0) = \left. \frac{\partial g(\mathbf{m})}{\partial m_i} \right|_{\mathbf{m}_0} \Delta\mathbf{m} \quad (3.22)$$

Então, a relação entre as perturbações nos dados e a perturbação nos modelos podem ser escritas como:

$$\Delta\mathbf{d} = F_k \Delta\mathbf{m} \quad (3.23)$$

Onde F é a derivada primeira de Fréchet, as derivadas de \mathbf{d} em relação aos parâmetros do modelo.

Pela equação (3.23) é perceptível que o operador F_k que contém as derivadas parciais do dado em relação aos parâmetros do modelo é dependente de \mathbf{m}_0 . Se o operador g for linear, a função erro $E(\mathbf{m})$ será quadrática e existirá um único mínimo global. A existência de apenas um mínimo não é garantida se g não for linear, dessa forma, a escolha de \mathbf{m}_0 torna-se importante, pois F_k calculado a partir de um \mathbf{m}_0 mal escolhido pode levar a solução do problema inverso para um mínimo local da função erro.

A estrutura básica de um algoritmo para resolver problemas inversos não-lineares utilizando a linearização do operador é (Berryman, 1991):

- 1- Sendo \mathbf{d}^{obs} e m_0 , respectivamente o conjunto de dados observados e o modelo inicial.
- 2- Calcular o operador linearizado F_k e obter \mathbf{d}_{calc} , que é o dado calculado utilizando \mathbf{m}_k .
- 3- Se $\Delta\mathbf{d} = \mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}^{calc}$ menor que uma tolerância, parar o algoritmo e assumir m_k como solução.
- 4- Achar a correção $\Delta\mathbf{m}$, que é a solução do problema linearizado $F_k \Delta\mathbf{m} = \Delta\mathbf{d}_k$.

5- Atualizar o modelo \mathbf{m}_k de modo que $\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \Delta\mathbf{m}$.

6- Retornar ao passo 2.

3.2.2 Gradiente Conjugado Não-Linear

Fletcher e Reeves (1964) mostraram como estender o Gradiente Conjugado Linear para o caso não-linear, com apenas duas alterações no algoritmo. A primeira alteração é o termo α_k que deve ser definido através de algum esquema de *line-search* (Nocedal e Wright, 2006) de forma que α_k minimize a função $E(m)$ na direção p_k . A segunda alteração é que o resíduo r que era definido como o gradiente de ϕ , agora é definido como o gradiente da função objetivo $E(m)$.

O algoritmo para o método do Gradiente Conjugado Não-Linear (Fletcher-Reeves) resulta em:

Dado \mathbf{m}_0 ; Calcular $E_0 = E(\mathbf{m}_0)$ e $\nabla E(\mathbf{m}_0)$;

Fazer $\mathbf{p}_0 \leftarrow -\nabla E_0$, $k \leftarrow 0$

Enquanto $\nabla E(\mathbf{m}) > \text{tolerancia}$ faça

Calcular α_k que minimize $E(m)$ na direção p_k ; (3.24a)

$\mathbf{m}_{k+1} \leftarrow \mathbf{m}_k + \alpha_k p_k$; (3.24b)

Calcular ∇E_{k+1} ; (3.24c)

$\beta_{k+1} \leftarrow \frac{\nabla E_{k+1}^T \nabla E_{k+1}}{\nabla E_k^T \nabla E_k}$ (3.24d)

$p_{k+1} \leftarrow -\nabla E_{k+1} + \beta_{k+1} p_k$; (3.24e)

$k \leftarrow k + 1$; (3.24f)

Fim do Faça

Existem algumas variações do algoritmo proposto por Fletcher e Reeves, sendo a principal diferença a escolha do parâmetro β_k . Uma variante importante é a de Polak e Ribière, no qual β_k é definido por:

$$\beta_{k+1} = \frac{\nabla E_{k+1}^T (\nabla E_{k+1} - \nabla E_k)}{\nabla E_k^T \nabla E_k} \quad (3.25)$$

Quando o *line-search* é calculado de forma exata ambos os algoritmos irão convergir para a mesma resposta. Porém quando se aplica em funções não-lineares nas quais o *line-search* não foi calculado de forma exata o algoritmo de Polak e Ribière tende a ser mais robusto e eficiente (Nocedal e Wright, 2006).

4 *Metodologia*

No contexto de dados reais, pode ser que apenas infinitos parâmetros sejam capazes de representar fielmente a geologia que gerou os dados observados. Sendo assim, talvez seja impossível encontrar o modelo ideal, aquele modelo, por exemplo, cujo o valor da função erro seria igual a zero, e isso se deve a quantidade limitada de parâmetros que os computadores podem trabalhar. Em linhas gerais, talvez não seja possível resolver o problema inverso perfeitamente e reconstruir o campo original de velocidades, pois a utilização de menos parâmetros que o necessário pode implicar na perda de informações e resolução.

A falta de uma cobertura angular completa dos raios também é um fato que possui influência negativa na solução da tomografia. E certas geometrias de aquisição, tais como a poço-a-poço, não providenciam uma cobertura angular completa dos raios resultando também em perda de resolução e prejudicando a não-unicidade da solução (Zhou, 2003).

Não bastasse essas limitações, o próprio método de tomografia sísmica por tempos de trânsito baseia-se em aproximações. Os métodos de *raytracing*, por exemplo, baseiam-se nas equações do raio, que assumem um campo de velocidades suave e frequência infinitamente alta. A integral de linha na modelagem direta e a solução do sistema linear são resolvidos, geralmente, através de métodos numéricos, que por sua vez, resultam apenas em soluções aproximadas.

Alia-se a esses fatores de dificuldade, o fato dos problemas inversos serem geralmente mal-postos, e por causa disso, espera-se que a tomografia possua infinitas soluções possíveis. Além disso a aquisição de dados não é perfeita. Há presença de ruídos aleatórios que não podem ser evitados tais como erro de medidas no equipamento de registro, animais, vento e etc. Uma vez que o modelo físico não assume a existência de tais ruídos, esta se torna mais uma dificuldade em se encontrar uma solução para a tomografia.

Nesse trabalho buscou-se testar a sensibilidade do algoritmo de tomografia em diversas situações que poderiam influenciar no resultado final. Testou-se a influência do modelo inicial de vagarosidades, quantidade de parâmetros, parametrização do modelo, a densidade de raios e a sensibilidade a ruídos aleatórios.

4.1 Parametrização do Modelo

A quantidade de parâmetros e a forma adotada para a parametrização do modelo possuem influência na solução que a tomografia fornecerá. Dois casos especiais de quantidade de parâmetros foram empregadas nos testes: o caso sobredeterminado e o caso subdeterminado. O primeiro quando a quantidade de raios é maior que a quantidade de parâmetros a serem invertidos; o segundo caso ocorre quando a quantidade de raios é menor que a quantidade de parâmetros que serão determinados durante a inversão.

O modelo é representado de forma distinta durante a modelagem direta e durante a inversão. No caso sobredeterminado, por exemplo, a quantidade de pontos na modelagem direta é maior do que durante a inversão, isto é, a malha durante a modelagem direta é mais apertada que durante a inversão. Já no caso subdeterminado optou-se utilizar uma quantidade de parâmetros durante a modelagem será igual ao da inversão. Essa estratégia de parametrizações distintas para a inversão e modelagem visa um cálculo mais preciso das trajetórias dos raios e dos tempos de trânsito na modelagem direta. Já para inversão essa estratégia busca uma melhor iluminação dos parâmetros do modelo a serem invertidos, o que favorece a solução. Ressalta-se que nesse trabalho as células utilizadas são quadradas, mas essa condição não é obrigatória.

No caso subdeterminado utilizou-se uma parametrização por células homogêneas, ou blocos, de vagarosidades, cuja a implementação é mais simples. Já no sobredeterminado utilizou-se uma parametrização por interpolação bilinear, implementada de forma similar a de Prothero *et al* (1988).

Considerou-se para caso da interpolação bilinear uma malha de pontos de controle, ou nós, nos quais os valores da vagarosidade é conhecido. Nos demais pontos a vagarosidade é interpolada segundo a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
s(x, y) = & \\
& \frac{S_{i,j}}{(X_{i+1} - X_i)(Y_{j+1} - Y_j)}(X_{i+1} - x)(Y_{j+1} - y) + \\
& \frac{S_{i+1,j}}{(X_{i+1} - X_i)(Y_{j+1} - Y_j)}(x - X_i)(Y_{j+1} - y) + \\
& \frac{S_{i,j+1}}{(X_{i+1} - X_i)(Y_{j+1} - Y_j)}(X_{i+1} - x)(y - Y_j) + \\
& \frac{S_{i+1,j+1}}{(X_{i+1} - X_i)(Y_{j+1} - Y_j)}(x - X_i)(y - Y_j)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Onde $X_i \leq x \leq X_{i+1}$, $Y_j \leq y \leq Y_{j+1}$, s é a vagarosidade no ponto (x, y) , (X_i, Y_j) é um ponto pertencente a malha, $S_{i,j}$ é a vagarosidade no ponto (X_i, Y_j) e i e j são os índices dos pontos pertencentes a malha conhecida na direção horizontal e vertical, respectivamente.

4.2 Geração dos dados sintéticos

Esta é a primeira etapa a ser executada, e que consiste na geração dos dados sintéticos. Para tal, calcula-se, os tempos de trânsitos através de traçado de raios utilizando o campo original de vagarosidades.

O geometria de aquisição utilizada foi poço-a-poço e, para todos os exemplos, as fontes se localizam na borda vertical esquerda e os receptores na borda vertical direita. As fontes e os receptores são igualmente espaçados ao longo de toda a distância vertical.

Por fim, os tempos calculados nessa etapa serão considerados os dados observados para o algoritmo de tomografia.

4.3 Cálculo das derivadas de Fréchet

No problema de tomografia por tempos de trânsito a equação (3.23) se transforma em:

$$F\Delta\mathbf{s} = \Delta\mathbf{t}, \quad (4.2)$$

onde \mathbf{s} é o conjunto de parâmetros do modelo (valores de vagarosidade) e \mathbf{t} é o conjunto de dados (registro de tempo). E para se resolver esse sistema de equações é necessário a determinação dos elementos que compõem F . E uma vez que F depende da equação (2.1), a parametrização do modelo terá influência nesse cálculo.

Ao se utilizar uma parametrização de células de vagarosidades homogêneas, pode-se escrever o problema direto através do seguinte sistema linear:

$$L\mathbf{s} = \mathbf{t} \quad (4.3)$$

onde L é a matriz contendo os valores de l_{ij} , que é a distância percorrida pelo i -ésimo raio na j -ésima célula, \mathbf{s} é o vetor coluna contendo os valores de vagarosidades s_j e \mathbf{t} é o vetor coluna contendo os valores de tempo t_i calculados para cada i -ésimo raio. Nesse caso de parametrização, o operador F da equação (4.2) é a própria matriz L , encontrada na bibliografia com o nome de matriz sensibilidade, matriz de derivadas ou jacobiana.

Porém, na utilização de uma parametrização por uma malha de pontos conhecidos e interpolação dos pontos fora da malha o cálculo de F é diferente. Com essa parametrização, os elementos de F dependerão de como os pontos são interpolados, já que o valor de vagarosidades em um dado ponto será função de mais de um elemento do conjunto de parâmetro do modelo. Independente do esquema de interpolação utilizado pode-se definir o valor de vagarosidade em um determinado ponto da seguinte forma:

$$s(x, y, m_1, m_2, \dots, m_N) = f(x, y, m_1, m_2, \dots, m_N) \quad (4.4)$$

Onde x e y são as coordenadas no espaço do ponto, m_1, m_2, \dots, m_N são os valores de vagarosidades conhecidos nos pontos $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ e f é uma relação conhecida. Conhecendo os pontos pertencentes ao raio, pode-se utilizar a equação (2.6) para o cálculo dos elementos de F . Aplicando o operador de derivadas de ambos

os lados da equação (2.6), tem-se:

$$\frac{\partial \Delta t_{p,p+1}}{\partial m_j} = \frac{\partial}{\partial m_j} \left(\int_0^1 s(x(k), y(k), m_1, m_2, \dots, m_N) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} dk \right) \quad (4.5)$$

Essa equação representa a variação no tempo de trânsito no segmento de reta que une dois pontos consecutivos do raio quando existe uma variação no parâmetro m_j do modelo. Porém, deseja-se calcular a variação no tempo de trânsito de todo o raio quando m_j sofre alguma variação. A variação no tempo de trânsito de todo o raio será a soma de todas as pequenas variações em cada segmento de raio que compõem o raio, resultando em:

$$\frac{\partial t}{\partial m_j} = \sum_{p=1}^{P-1} \frac{\partial \Delta t_{p,p+1}}{\partial m_j} \quad (4.6)$$

4.4 Regularização

Nem sempre o sistema $F\Delta s = \Delta t$ terá o mesmo número de equações e o mesmo número de incógnitas. Para contornar esse problema, pode-se buscar uma solução que minimize o erro no sentido dos mínimos quadrados, sendo que para isso é necessário multiplicar a esquerda de ambos os lados da igualdade por $(F^T F)^{-1} F^T$. Ao se realizar essa multiplicação obtém-se:

$$\Delta s = (F^T F)^{-1} F^T \Delta t \quad (4.7)$$

Os problemas em tomografia sísmica são frequentemente mal-postos, ou seja, o problema pode não possuir solução ou não possuir solução única. Assim, é possível que a matriz F seja singular ou numericamente singular.

Para contornar as matrizes singulares pode-se modificar o problema original por um problema aproximado, mas que é bem-posto. Esse procedimento denomina-se regularização.

De forma geral, o problema regularizado pode ser escrito como:

$$\Delta \mathbf{s} = (F^T W F + \lambda R^T R)^{-1} F W \Delta \mathbf{t} \quad (4.8)$$

onde R e W são operadores que irão ajudar a regularizar o problema e λ é um escalar não-negativo.

A escolha de W e R são arbitrárias, e uma escolha simples é fazer $W = R = I$, sendo I a matriz identidade. Essa é a regularização de Tikhonov (Tikhonov e Arsenin, 1977), que além de minimizar a diferença $\Delta \mathbf{t} - F \Delta \mathbf{s}$, busca também uma minimização da norma de $\Delta \mathbf{s}$. Nesse caso o parâmetro λ será uma variável que representará o compromisso entre a minimização da diferença ou da norma (Scales *et al*, 2001) de $\Delta \mathbf{s}$, valores maiores de λ significa que o problema regularizado é mais distante do problema original, mas provavelmente é mais estável.

Caso se deseje minimizar o gradiente, R pode ser definido como o operador de primeiras derivadas em diferenças finitas (Scales *et al*, 2001). De forma análoga, caso se deseje minimizar a segunda derivada ou até mesmo derivadas de ordens superiores basta substituir R pelo operador de diferenças finitas da ordem da derivada desejada.

As matrizes W e R também podem ser construídas tendo como base as incertezas das medidas. Berryman (1991) afirma que a maior parte dos erros entre o dado calculado e o observado é devido a escolha das trajetórias dos raios. Definindo duas matrizes C e L , de modo que:

$$C_{jj} = \sum_{i=1}^N F_{ij} \quad (4.9)$$

$$L_{ii} = \sum_{j=1}^M F_{ij} \quad (4.10)$$

onde N é o número de raios e M é o número de parâmetros do modelo. A matriz C é a matriz diagonal que possui a soma das colunas de F e L é a matriz diagonal que possui a soma das linhas de F . Berryman (1991) ao se basear em argumentos físicos, tais como retroprojeção dos raios (*backprojection*, e matemáticos (número de condição da matriz) a utilização de $W = L^{-1}$ e $R^T R = C$. O uso dessas matrizes permite que os autovalores α de $F^T W F + \lambda R^T R$ estejam dentro do intervalo $\alpha \leq 1$, o que é

vantajoso do ponto de vista do número de condição da matriz e da implementação de alguns métodos numéricos para resolver o sistema linear. Novamente o escalar λ é arbitrário e representa o compromisso em se estabilizar o problema e em manter o problema mais próximo do original possível.

4.5 Solução e Aspectos Práticos

Na prática, a matriz F na Equação (4.2) é esparsa. Cada linha i representa um raio, cada coluna j representa um parâmetro e o valor atribuído a cada F_{ij} é a derivada do tempo t_i em relação a cada parâmetro do modelo s_j . Uma vez que cada raio apenas percorre uma parte do modelo, a matriz F pode ter mais de 99% dos valores iguais a zero (Scales, 1987).

Um problema associado ao uso de matrizes grandes é a limitação de memória. Dependendo da quantidade de raios e de parâmetros a serem invertidos, a memória computacional disponível pode não ser suficiente. Em contrapartida, pelo fato da matriz F ser esparsa, e assim uma grande quantidade de seus valores serem iguais a zero, podemos representar F através de uma estrutura de dados que apenas utilize os valores que sejam diferentes de zero.

Scales (1987) sugere o seguinte esquema de estrutura de dados:

$$elem(k) = F(ilinha(k), icoluna(k)) \quad \text{para } k = 1, 2, 3 \dots N \quad (4.11)$$

Onde N é o número de termos não-nulos da matriz F , $elem(k)$ é o k -ésimo elemento não-nulos da matriz F , $ilinha(k)$ e $icoluna(k)$ são os índices da linha e coluna do k -ésimo elemento não-nulo de F .

Então, por exemplo, se F for:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Nesse caso então $elem = (1, 4, 3, -2, 1)$, $ilinha = (1, 1, 2, 2, 3)$ e $icoluna = (1, 4, 1, 2, 3)$.

Nesse esquema também podemos definir produtos entre vetores e matrizes. Por exemplo, para $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

$$\forall k \quad y(\text{linha}(k)) = y(\text{linha}(k)) + \text{elem}(k) * x(\text{coluna}(k)) \quad (4.13)$$

e para $\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}$

$$\forall k \quad y(\text{coluna}(k)) = y(\text{coluna}(k)) + \text{elem}(k) * x(\text{linha}(k)) \quad (4.14)$$

O problema em se utilizar o algoritmo de gradientes conjugados descrito em (3.18) é que será necessário utilizar as equações normais (3.9). Mesmo que F seja esparsa, a matriz $F^T F$ é densa e, dessa forma, poderá resultar em problemas de convergência lenta se F for mal condicionada ou em problemas de memória, pois todos os valores de F deverão ser armazenados na estrutura de dados. É possível evitar o cálculo da matriz $F^T F$ ao substituir termos do tipo $F^T \mathbf{d} - F^T F \mathbf{m}$ por $F^T (\mathbf{d} - F \mathbf{m})$ e resolver a subtração primeiro. Logo, um algoritmo resultante para resolver $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pelo métodos dos gradientes conjugados seria (Hestenes e Stiefel, 1952):

Dado \mathbf{x}_0 ;

Definir: $\mathbf{s}_0 \leftarrow \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, $\mathbf{r}_0 \leftarrow \mathbf{p}_0 \leftarrow \mathbf{A}^T (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0) \leftarrow \mathbf{A}^T \mathbf{s}_0$, $\mathbf{q}_0 \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{p}_0$;

Para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\alpha_{k+1} \leftarrow \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{q}_k}; \quad (4.15a)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k + \alpha_{k+1} \mathbf{p}_k; \quad (4.15b)$$

$$\mathbf{s}_{k+1} \leftarrow \mathbf{s}_k - \alpha_{k+1} \mathbf{q}_k; \quad (4.15c)$$

$$\mathbf{r}_{k+1} \leftarrow \mathbf{A}^T \mathbf{s}_{k+1}; \quad (4.15d)$$

$$\beta_{k+1} \leftarrow \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}; \quad (4.15e)$$

$$\mathbf{p}_{k+1} \leftarrow \mathbf{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \mathbf{p}_k; \quad (4.15f)$$

$$\mathbf{q}_{k+1} \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{p}_{k+1}; \quad (4.15g)$$

Fim do para

Naturalmente é necessário algum critério de parada, por exemplo, se $|r_k| < \textit{tolerancia}$.

4.6 Tomografia

O algoritmo de tomografia utilizado nesse trabalho pode ser visto na Figura 8. Tal algoritmo é baseado na inversão linearizada, da forma que é descrita no Capítulo 3, e possui duas etapas principais. A primeira consiste na modelagem direta, e é a etapa em que se calcula os tempos de trânsitos e as trajetórias dos raios por *raytracing*. A segunda etapa constitui-se da solução do sistema linear $F_k \Delta s_k = \Delta t$. Para resolver o sistema, utilizou-se o algoritmo de Gradiente Conjugado Linear, tal como descrito no Capítulo 3. Realizou-se a regularização do operador F_k ao se utilizar as matrizes W e R tais como propostas por Berryman (1991). Já o parâmetro λ no intervalo de $10^{-3} \leq \lambda \leq 10^{-1}$ mostrou-se suficiente para regularizar o sistema.

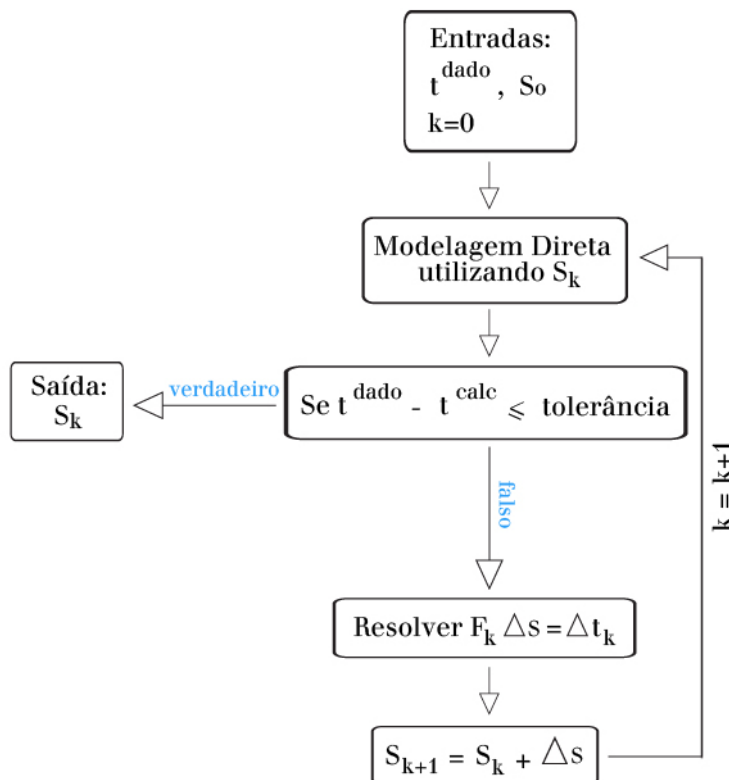


Figura 8: Algoritmo para a tomografia sísmica.

4.7 Modelo Inicial, informações *a priori* e tratamentos *a posteriori*

Outro fator que possui influência no resultado obtido pela inversão tomográfica é o modelo de vagarosidades inicial. Uma má escolha deste modelo pode levar o processo iterativo de inversão a convergir para um mínimo local da função erro e, a solução encontrada, além de não ser a melhor possível, pode não fazer nenhum sentido do ponto de vista geológico. Testou-se dois tipos de modelos iniciais: sendo primeiro um modelo homogêneo, cuja velocidade é um valor médio das velocidades existentes no modelo original e o segundo um modelo considerado próximo à solução do mínimo global, que neste trabalho, nada mais é do que o modelo original suavizado utilizando um filtro de média móvel de 100 amostras.

Espera-se que o modelo inicial homogêneo possua um valor de função erro maior do que um que seja o modelo original suavizado. E por esse motivo, a tomografia iniciada a partir do modelo homogêneo tenha mais "oportunidades" de convergir para um mínimo local e resultar em uma solução considerada pior do que se o modelo inicial fosse próximo ao mínimo global.

Uma maneira de tentar obter uma melhor solução é incorporar informações conhecidas *a priori* como restrições a solução da inversão. No caso de geometria poço-a-poço, por exemplo, é comum que os poços sejam perfilados com ferramentas para se obter medidas geofísicas das rochas localizadas na parede do poço, e entre essas medidas está a de velocidade de onda sísmica. Sendo assim, pode-se impor as velocidades originais nas bordas esquerda e direita como restrições, pois é onde, supostamente, os poços estão localizados.

Nem sempre a solução encontrada na inversão é satisfatória do ponto de vista geológico. É possível que ocorra de um parâmetro possuir um valor anômalo se comparado aos demais, ou até mesmo em comparação a geologia conhecida da região. Por exemplo, não se espera valores de velocidade sísmicas negativas nas rochas e nem velocidades abaixo de 1500 *m/s*, que é a velocidade média da onda acústica na água. O mesmo pode ocorrer para valores de velocidade mais altos que a geologia local permita. Em casos mais graves pode ocorrer de um parâmetro não ser iluminado e qualquer valor associado a ele irá satisfazer o sistema de equações. E tais casos anômalos devem ser tratados para que não prejudiquem o processo tomográfico.

Um tratamento *a posteriori* comum é a suavização da imagem-solução, que irá

manter uma certa coerência local de vagarosidade entre os pontos próximos. Entretanto esse tipo de tratamento deve ser realizado de forma cuidadosa, pois a utilização de filtros com muitas amostras pode resultar em soluções tão suaves que as feições principais serão perdidas ou descaracterizadas. Ressalta-se que a suavização também pode espalhar velocidades anômalas se elas não forem tratadas antes da suavização.

5 Aplicações

Esse Capítulo é separado em duas seções e consiste nos exemplos e testes realizados com a tomografia sísmica. Na primeira seção todos os testes estão livres de ruídos aleatórios e na segunda seção os testes são feitos acrescentando um ruído aleatório ao dado observado. Ao final de cada subseção referente a cada modelo existe uma breve discussão dos resultados.

5.1 Aplicações livre de ruído

5.1.1 Modelo I

O Modelo I consiste na simulação de uma geologia com três camadas dobradas e uma camada sobreposta representando uma sedimentação posterior. As quatro camadas possuem um pequeno gradiente que varia de acordo com a distância em relação ao contato no topo. Esse modelo tem como objetivo verificar se a tomografia por tempos de trânsito é capaz de resolver satisfatoriamente um modelo suave e com pouca diferença entre a velocidade máxima e mínima presente no modelo. E as dimensões do Modelo I são de 400 metros na vertical e 200 metros na horizontal.

Para a modelagem dos dados sintéticos utilizou-se 26 fontes e 26 receptores, que estão posicionados a distâncias regulares de 16 metros do início ao fim da distância vertical do modelo, sendo as fontes localizadas na borda esquerda e os receptores na borda direita. A modelagem direta em todas as tomografia do Modelo I, inclusive a modelagem da geração dos dados sintéticos, foi feita utilizando uma malha regular de pontos espaçados a cada 2 metros, sendo 101 pontos na horizontal e 201 pontos na vertical.

Para a inversão, no caso subdeterminado foram utilizados 201 parâmetros na vertical e 101 na horizontal, totalizando 20301 blocos a serem invertidos. Já no caso

sobredeterminado utilizou-se 21 parâmetros na horizontal e 11 na vertical, totalizando 231 parâmetros.

O primeiro teste consiste em um modelo inicial homogêneo com velocidade igual a 2800 metros por segundo. Testou-se a solução da tomografia nos casos sobredeterminado (Figura 9) e subdeterminado (Figura 10). Ambas imagens ilustram a solução após 10 iterações, as variações das iterações posteriores são muito pequenas.

O segundo teste consiste em trocar o modelo inicial homogêneo por um que seja mais próximo da solução de mínimo global, que nada mais é do que o modelo original suavizado por um filtro de média móvel de 100 amostras. O resultado após 10 iterações não-lineares podem ser visto nas Figuras 11 e 12.

Buscou-se também testar a influência da quantidade de raios na solução encontrada pela tomografia. Para tal aumentou-se a quantidade de fontes e receptores para 101 igualmente espaçados, totalizando 10201 raios e mantendo a mesma quantidade de parâmetros, tanto para o caso subdeterminado tanto para o caso sobredeterminado. Os resultados podem ser vistos nas Figuras 13 e 14.

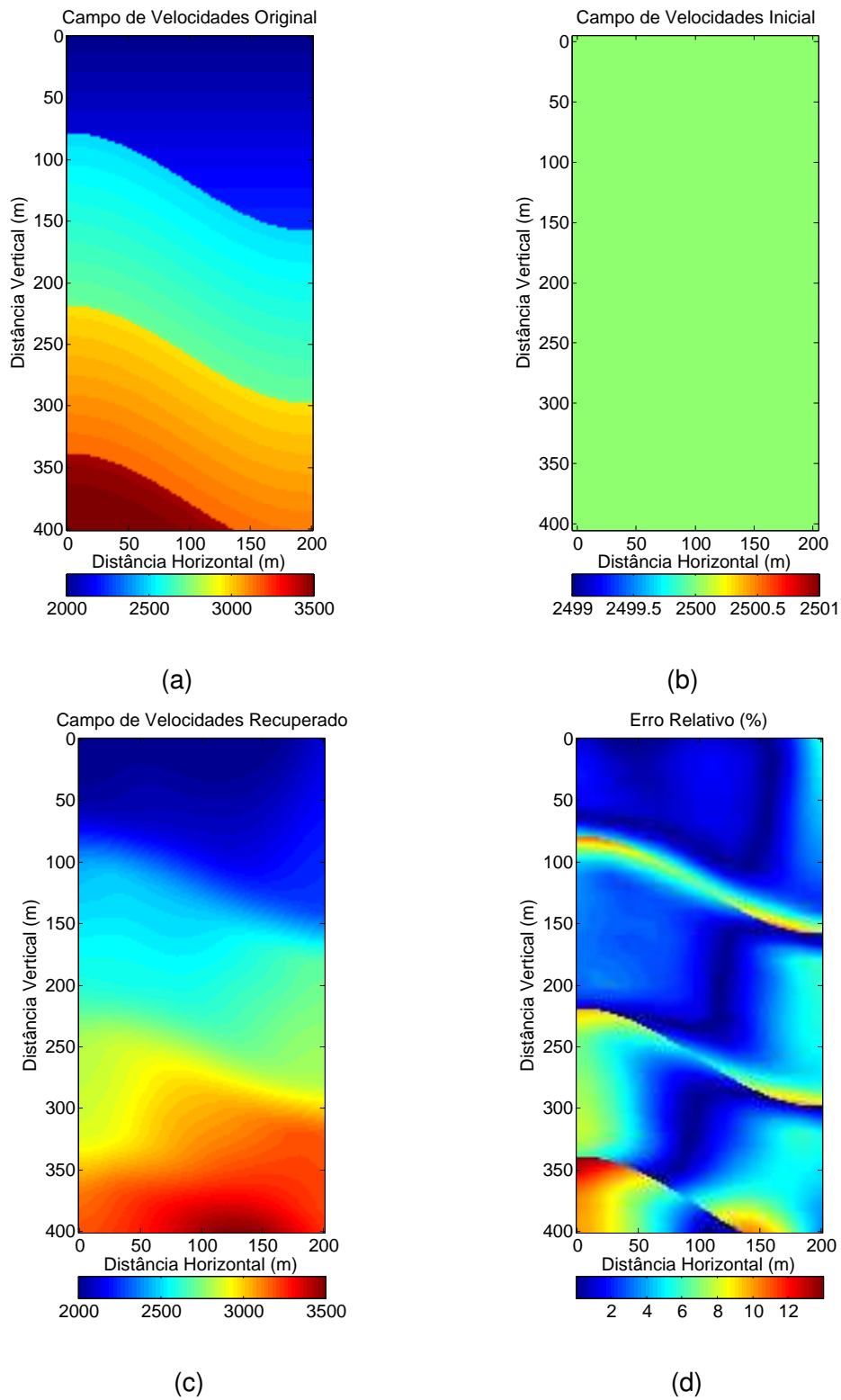


Figura 9: Resultado da Tomografia com o Modelo I utilizando uma parametrização de interpolação bilinear e o modelo inicial homogêneo. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

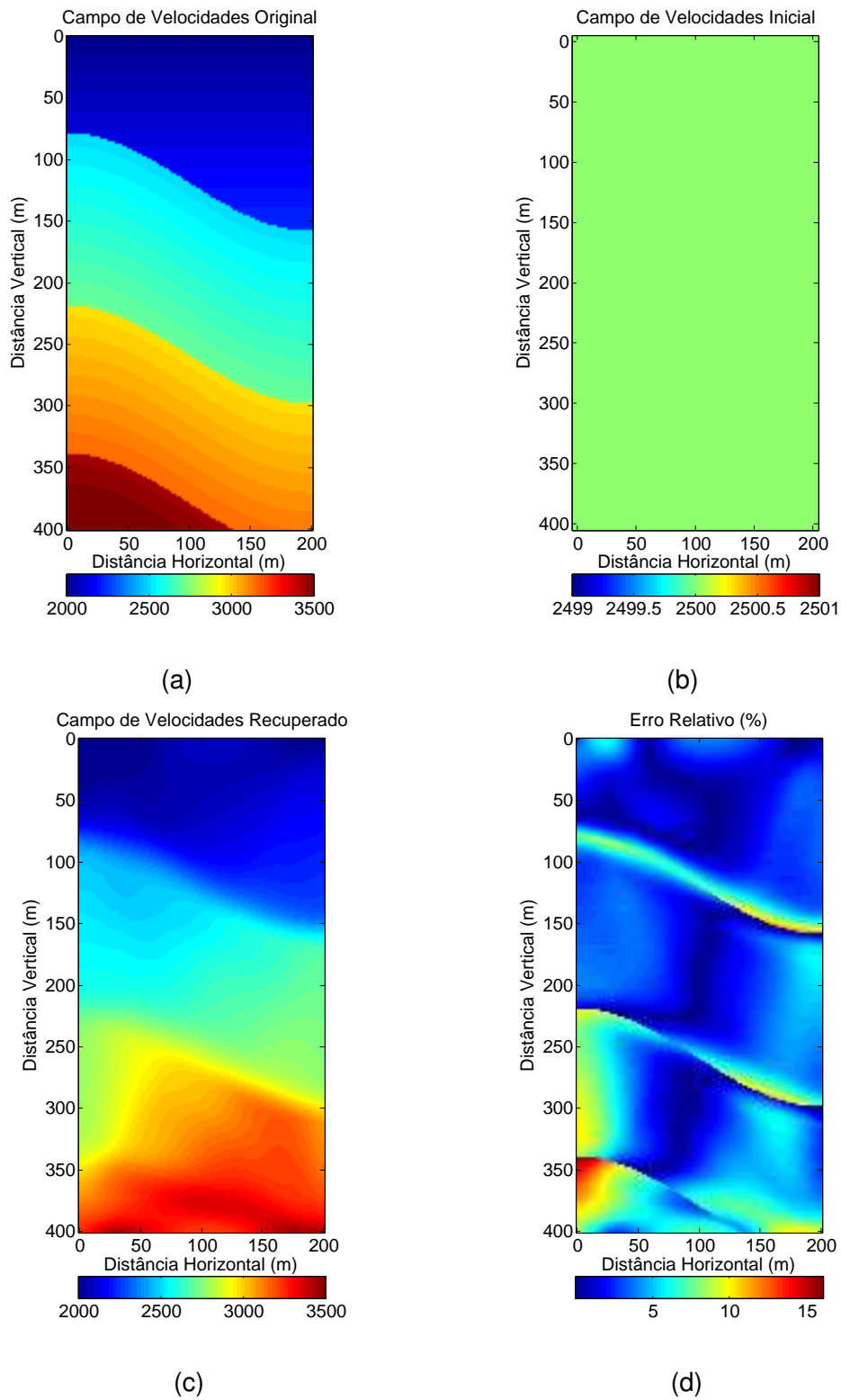


Figura 10: Resultado da Tomografia com o Modelo I utilizando uma parametrização de células homogêneas e o modelo inicial homogêneo. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

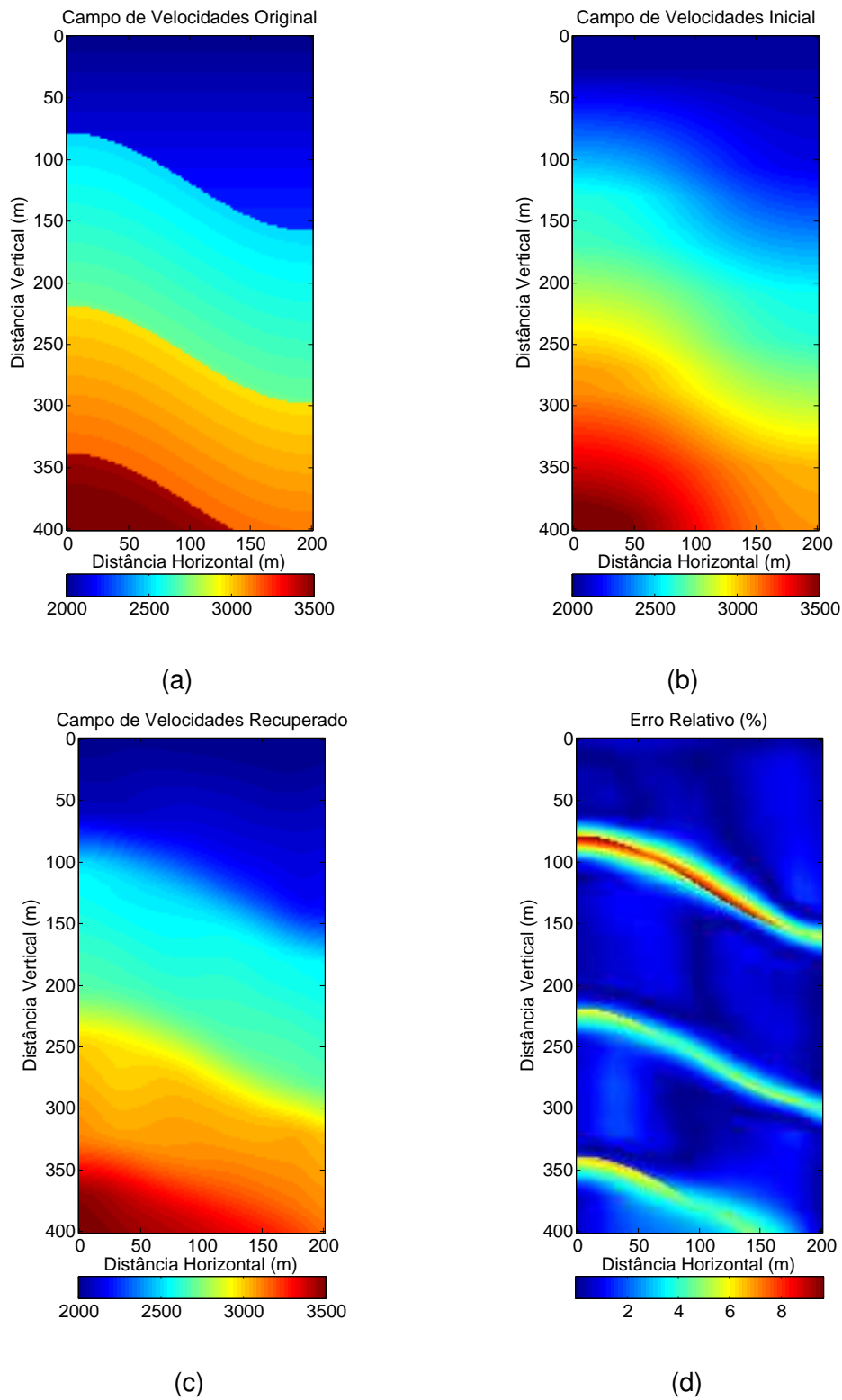


Figura 11: Resultado da Tomografia com o Modelo I utilizando uma parametrização de interpolação bilinear e o modelo inicial próximo ao original. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

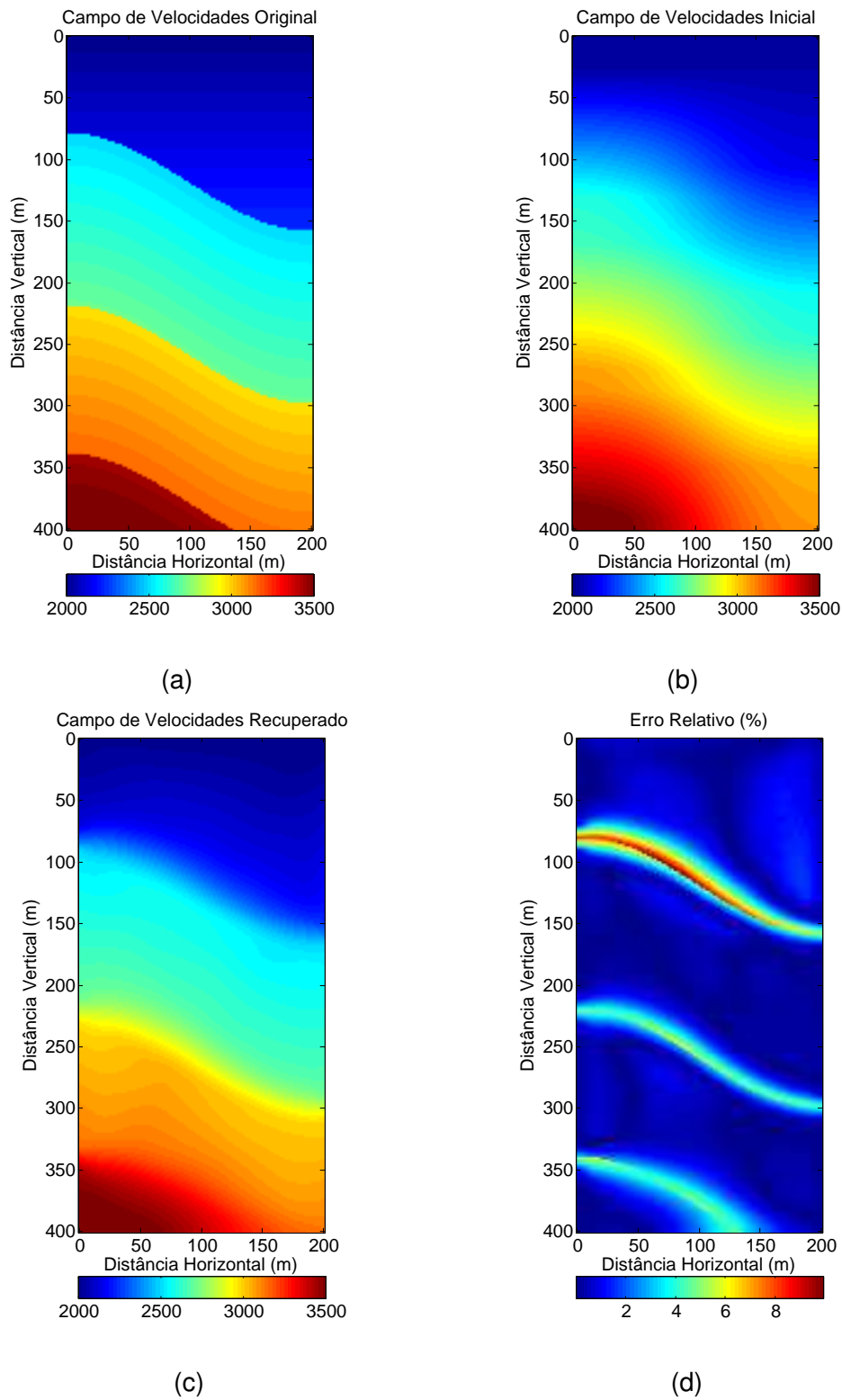


Figura 12: Resultado da Tomografia com o Modelo I utilizando uma parametrização de células homogêneas e o modelo inicial próximo ao original. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

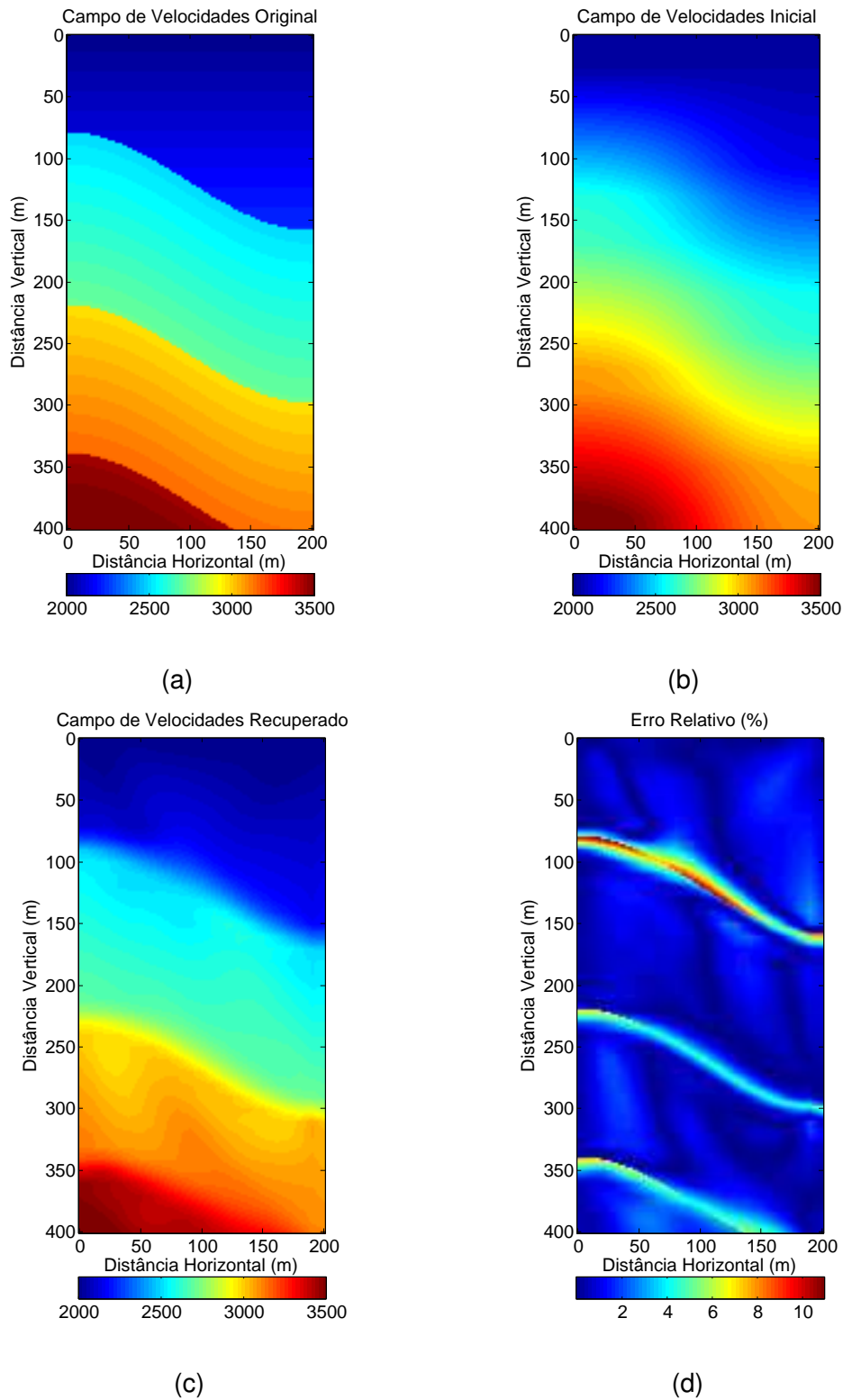


Figura 13: Resultado da Tomografia com o Modelo I utilizando uma parametrização de interpolação bilinear, um o modelo inicial próximo ao original e uma maior densidade de raios. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

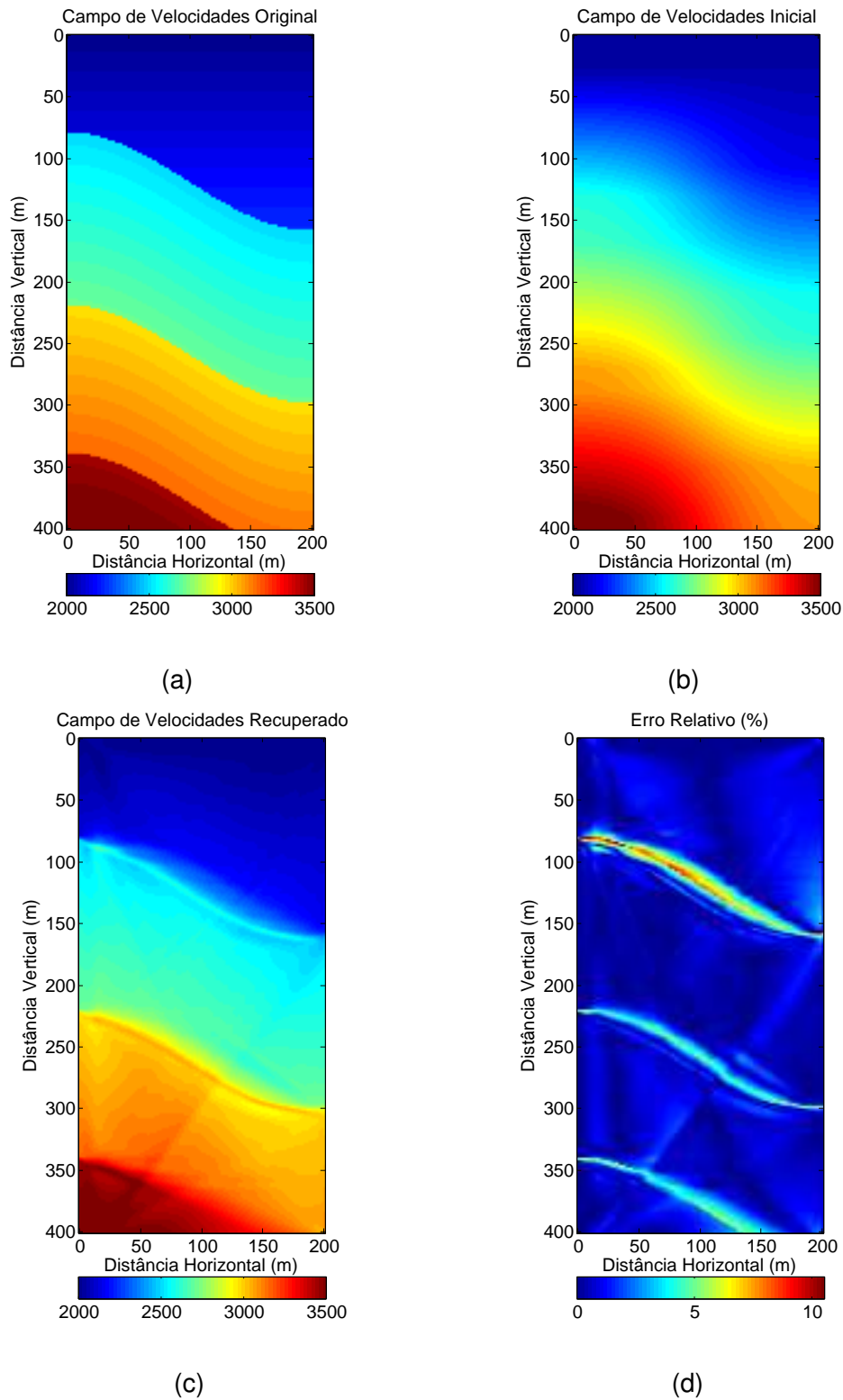


Figura 14: Resultado da Tomografia com o Modelo I utilizando uma parametrização de células homogêneas, um modelo inicial próximo ao original e uma maior densidade de raios. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

5.1.1.1 Discussão

O primeiro teste, que consistiu na tomografia a partir de um modelo inicial homogêneo, mostrou que um modelo inicial ruim pode resultar em soluções pouco satisfatórias ao se comparar com o resultado da tomografia que teve como modelo inicial um mais próximo do modelo verdadeiro. No caso sobredeterminado e subdeterminado o processo tomográfico não foi capaz de mapear eficientemente as bordas do modelo, que são as regiões com maior erro relativo. Também houve pouca mudança na solução com a diferente parametrização utilizada, mostrando que para modelos suaves e poucos raios uma parametrização por interpolação bilinear e poucos parâmetros tem uma solução tão boa quanto a de muitas células homogêneas.

Já o segundo teste demonstra que o modelo inicial bom faz diferença favorável na solução encontrada, principalmente se aliada a restrições nas bordas. Entretanto pouca diferença se notou entre a solução subdeterminada e sobredeterminada, porém a solução subdeterminada aparentemente tenha um erro relativo menor no interior das camadas dobradas. Já na solução sobredeterminada o erro relativo mais próximo a zero encontra-se apenas nas regiões mais centrais. O modelo inicial melhor de modo geral diminui o erro relativo como um todo independente da parametrização utilizada.

Outro fator digno de nota nos dois testes é que independentemente do modelo inicial a tomografia não foi capaz de delimitar os contatos entre as camadas, que são as regiões com maior erro relativo. Porém quando se acrescenta mais raios, tal como no terceiro teste, as regiões de contato ficam melhor delimitadas. Alguns detalhes, tais como as curvas nas camadas dobradas, que com uma menor densidade de raios não eram visíveis, com a maior densidade de raios se tornam possíveis de serem visualizados. Sendo assim, é possível afirmar que a maior densidade de raios colabora para uma melhor resolução da imagem-solução resultante da tomografia. Outra vantagem de se utilizar mais raios foi a utilização de um λ menor e uma suavização *a posteriori* com um filtro menor. O erro nos contatos das camadas em parte é causada pela suavização *a posteriori* e não apenas pela limitação do traçado de raios.

O teste com a maior densidade de raios também destaca a importância da quantidade de parâmetros no que diz respeito a resolução. A pouca quantidade de parâmetros utilizada na tomografia utilizando a interpolação bilinear resulta em uma resolução pior comparada a parametrização por blocos e uma alta quantidade de parâmetros. Embora os resultados utilizando mais raios sejam superiores aos anteriores que possuem menos raios, os contatos entre as camadas são melhor mapeados no caso

subdeterminado.

5.1.2 Modelo II

O Modelo II representa a existência de um acúmulo de hidrocarbonetos. O objetivo é testar se a tomografia poço-a-poço pode retornar resultados satisfatórios para a indicação ou até mesmo para o mapeamento das dimensões de um reservatório, principalmente no caso de acúmulo de gás, que usualmente possui velocidades sísmicas mais baixas que as rochas encaixantes. Esse modelo também tem como objetivo testar se a tomografia é capaz de discriminar pequenas variações de velocidades e como a tomografia responde a modelos com grandes camadas de velocidade homogêneas.

A geração dos dados sintéticos foi feita utilizando 51 fontes com espaçamento regular ao longo de toda a distância vertical na borda esquerda e 51 receptores também igualmente espaçados ao longo da borda direita. O traçado de raios da modelagem direta foi efetuado em uma malha regular de pontos que contém 101 colunas por 501 linhas, e cujo espaçamento entre os nós da malha é de 2 metros em ambas as dimensões.

Para a inversão do caso subdeterminado utilizou-se 501 blocos na horizontal e 101 na vertical, totalizando 50601 a serem invertidos. Já para o caso sobredeterminado utilizou-se uma malha regular de 51 parâmetros na horizontal e 11 na vertical. O modelo inicial foi construído a partir da interpolação entre as velocidades nos dois poços e uma suavização por um filtro de média móvel de 10 amostras, de modo que o modelo inicial não conseguisse identificar a existência de uma anomalia de baixa velocidade no centro do modelo. Os resultados das tomografias após 10 iterações pode ser vistos na Figuras 15 e 16.

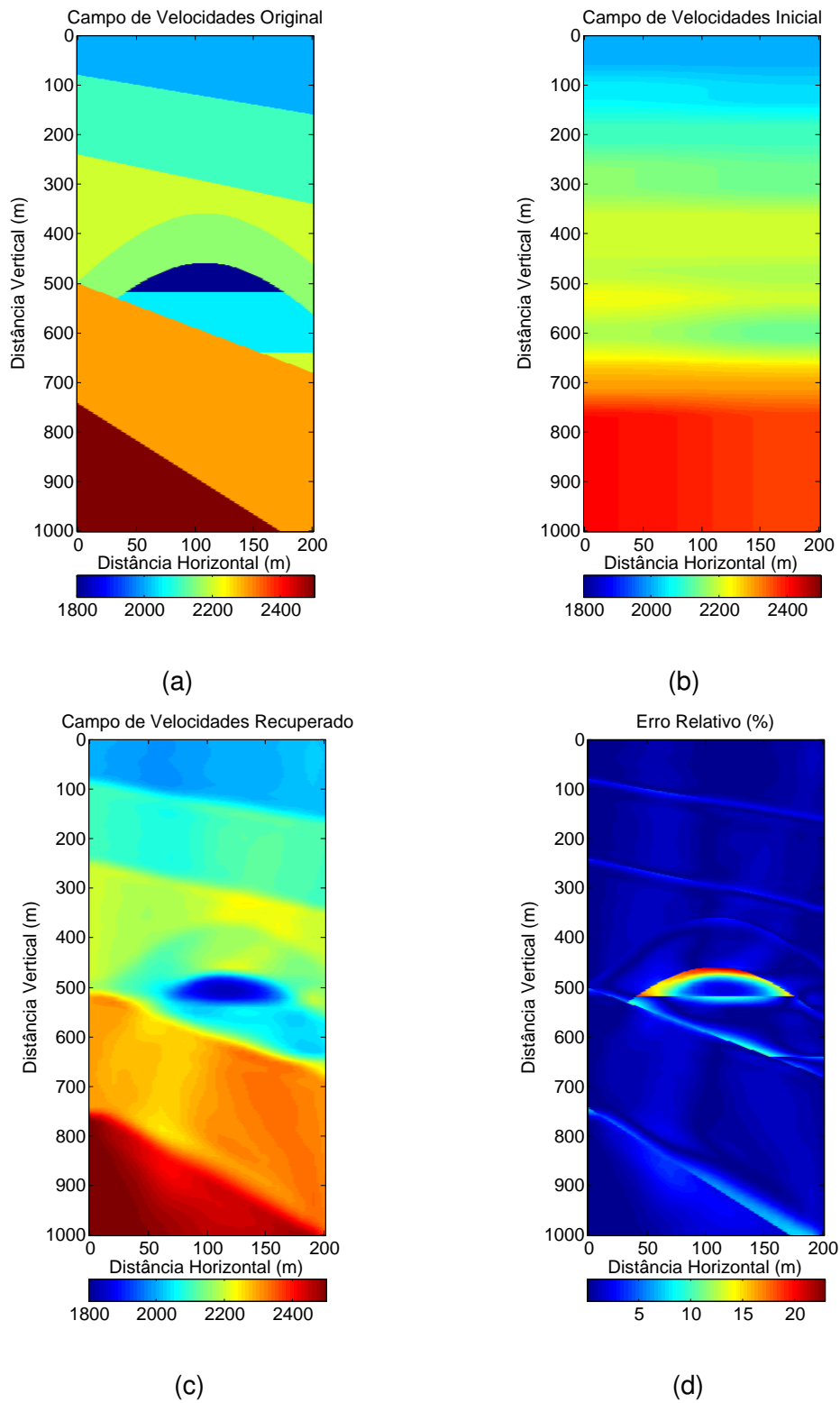


Figura 15: Resultado da Tomografia com o Modelo II utilizando uma parametrização de interpolação bilinear. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

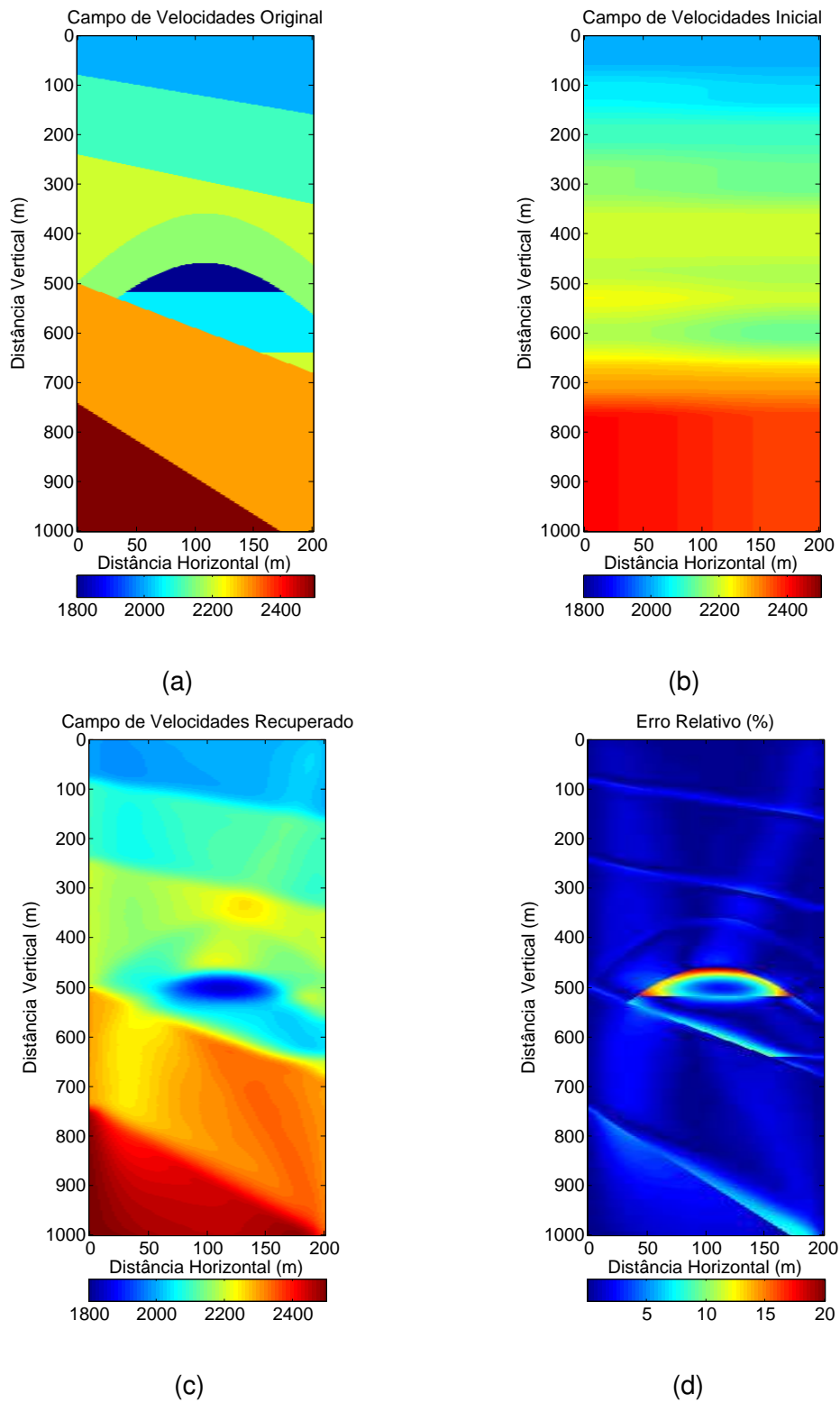


Figura 16: Resultado da Tomografia com o Modelo II utilizando uma parametrização de células homogêneas. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

5.1.2.1 Discussão

No teste envolvendo o Modelo II, ambos os casos foram capazes de identificar a presença de uma anomalia de baixa velocidade. Entretanto, não foram capazes de delimitar corretamente as dimensões da anomalia, que são exatamente as regiões onde ocorreram os maiores erros relativos. No contexto de exploração de hidrocarbonetos a solução encontrada é muito satisfatória. Uma vez que o modelo inicial não contemplava a anomalia e mesmo assim a tomografia foi capaz de identificar corretamente a presença de uma anomalia de baixa velocidade.

Assim como nos testes realizados utilizando o Modelo I, a tomografia foi capaz de mapear eficientemente as camadas e seus contatos.

5.1.3 Modelo III

O Modelo III é uma seção do modelo de velocidades de Marmousi. A escolha dessa seção foi inspirada em Zhou (2003). São 51 fontes igualmente espaçadas ao longo de toda a direção vertical na borda esquerda e também são 51 receptores com as posições igualmente espaçadas, porém localizados na borda direita do modelo. O objetivo é testar a solução final encontrada pela tomografia dos dois modelos, sendo um deles o original e o outro o original suavizado por um filtro de média móvel de 20 amostras.

Para inversão utilizou-se apenas a parametrização por células homogêneas e são 751 parâmetros na vertical e 251 parâmetros na horizontal. A mesma quantidade de parâmetros é utilizada na modelagem direta.

O campo de velocidades inicial foi construído a partir do original suavizado por um filtro de média móvel de 100 amostras e é idêntico para os dois modelos. A solução após 10 iterações pode ser vista na Figura 17, o qual utiliza o Modelo III original e na Figura 18 que utiliza o Modelo III suavizado.

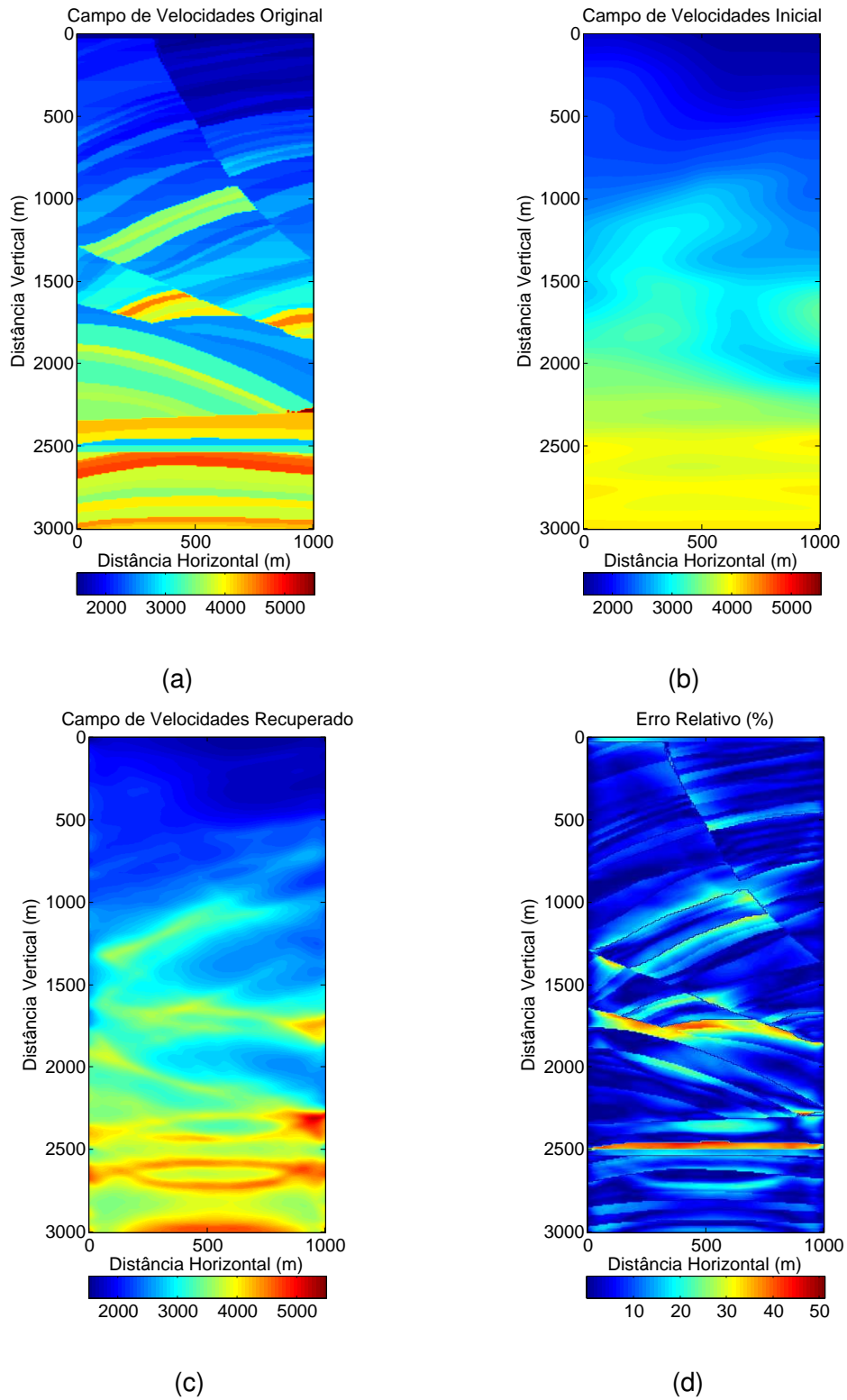


Figura 17: Resultado da Tomografia com o Modelo III original. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

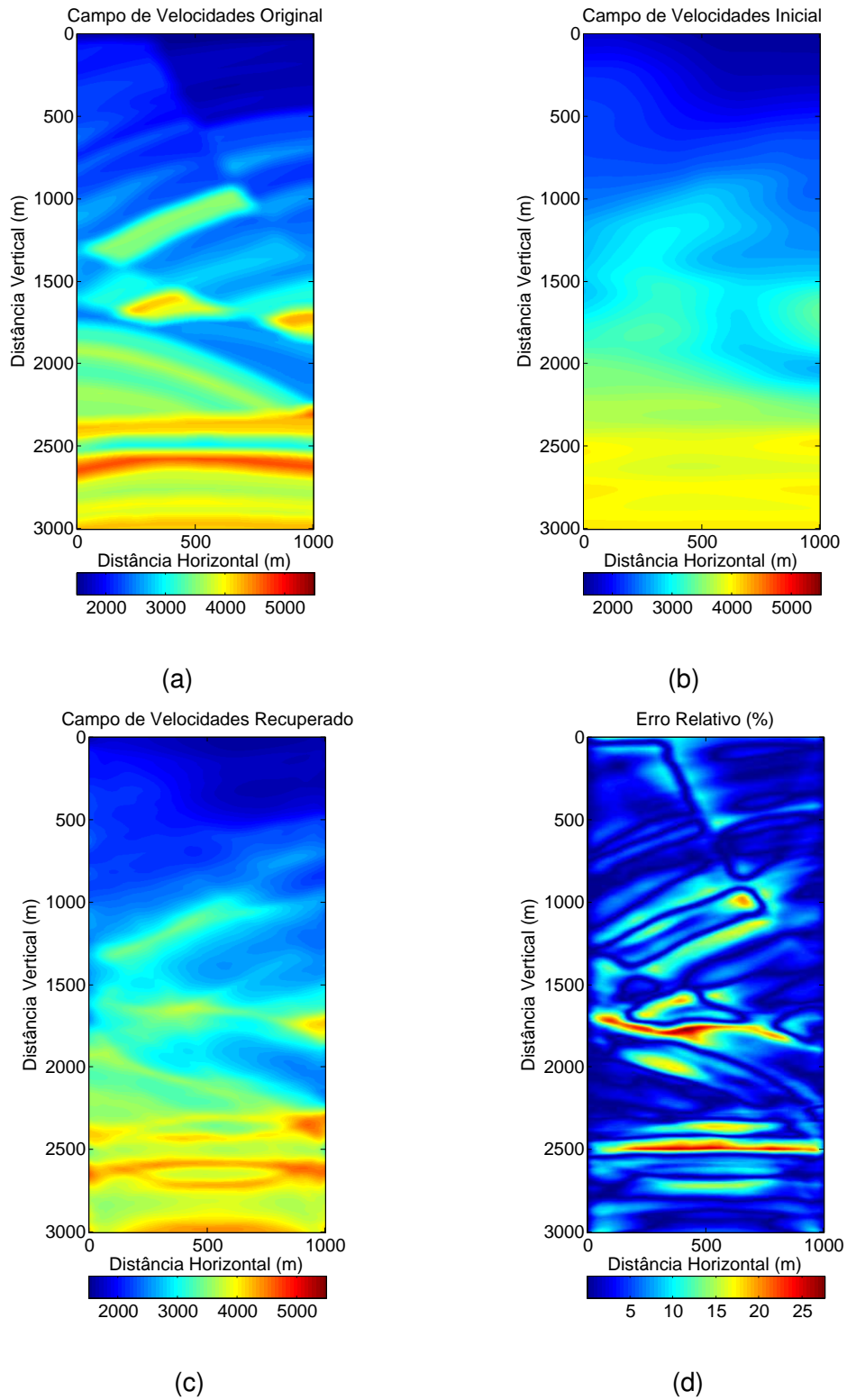


Figura 18: Resultado da Tomografia com o Modelo III suavizado. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

5.1.3.1 Discussão

O Modelo III, a seção de Marmousi é um modelo com maior grau de complexidade em relação aos dois anteriores. As anomalias de velocidade possuem contrastes abruptos de velocidade, principalmente o reservatório de hidrocarbonetos localizado aproximadamente na profundidade de 2500 metros, onde as camadas sotoposta e sobreposta possuem maior velocidade em relação ao reservatório.

Tanto na tomografia com o modelo original tanto no modelo suavizado a imagem-solução da tomografia são muito semelhantes. Em ambos os casos o reservatório é detectado como uma anomalia de baixa velocidade, mas a velocidade encontrada não é a correta. As anomalias principais são detectadas, porém sem muito detalhe no contato entre as camadas.

Esse último teste ilustra que a tomografia não é capaz de identificar muito detalhe. A imagem-solução terá um aspecto suave, em parte devido ao tratamento *a posteriori*, o que pode descaracterizar os detalhes e manter apenas as feições principais. E isso é mostrado quando dois modelos diferentes, porém muito parecidos, praticamente resultam na mesma solução para a tomografia.

5.2 Aplicações com ruídos aleatórios

Nessa segunda seção busca-se testar a sensibilidade da tomografia a ruídos aleatórios. Todo dado observado no campo trará ruído consigo e, portanto, é necessário que as técnicas sejam capazes de fornecer soluções satisfatórias se o dado de entrada possui uma razão sinal-ruído tolerável.

O dado observado sintético é mesmo utilizado na seção anterior, apenas tendo como diferença o acréscimo de um ruído aleatório. Tal ruído tem uma distribuição normal e o desvio padrão pode ser de 1, 2, 5 ou 10 milissegundos. Nos casos do Modelo I e II, onde os tempos observados são da ordem de 150 milissegundos, o acréscimo de 10 milissegundos pode ser considerado agressivo.

Esses valores de desvio padrão foram escolhidos devido a interpretação de como seria o ruído aleatório no dado observado. A sísmica de poço resultaria em diversos sismogramas de tiro comum e um geofísico iria determinar (fazer *picking* de tempo) o tempo da primeira chegada de ondas. Como pode ser visto nas Figuras 3 a 7 no

Capítulo 2 o sismograma será razoavelmente contínuo em sua primeira chegada de ondas, salvo em situações de problemas em um ou mais receptores. E nesses casos específicos caberá ao geofísico interpretar o tempo de chegada, que pode ser, por exemplo, interpolando o tempo usando canais próximos. Também existe a possibilidade de não se encontrar o pico da *wavelet* corretamente ou existir algum problema de estática no registro sísmico. Enfim, não é esperado que o ruído seja maior que algumas amostras de registro (que nesse trabalho foi considerado como sendo de 1 milissegundo). Sendo assim, o ruído de 1 milissegundo de desvio padrão significa que cerca de 64% das amostras possuem um ruído menor que uma amostra de registro.

Todas as tomografias dessa seção foram feitas considerando o caso subdeterminado.

5.2.1 Modelo I

No Modelo I foram realizados quatro testes utilizando a configuração de 26 fontes e 26 receptores e três testes utilizando a configuração de 101 fontes e 101 receptores. No caso de 26 fontes e 26 receptores realizou uma tomografia onde no dado observado acrescentou-se um ruído aleatório de distribuição normal de 1 milissegundo de desvio padrão (Figura 19), 2 milissegundos de desvio padrão (Figura 20), 5 milissegundos de desvio padrão (Figura 21) e 10 milissegundos de desvio padrão (Figura 22).

No caso de 101 fontes e 101 receptores, ou seja, utilizou-se mais raios foram efetuadas três tomografias com ruído aleatório de 1 milissegundo de desvio padrão (Figura 23), 5 milissegundos de desvio padrão (Figura 24) e 10 milissegundos de desvio padrão (Figura 25).

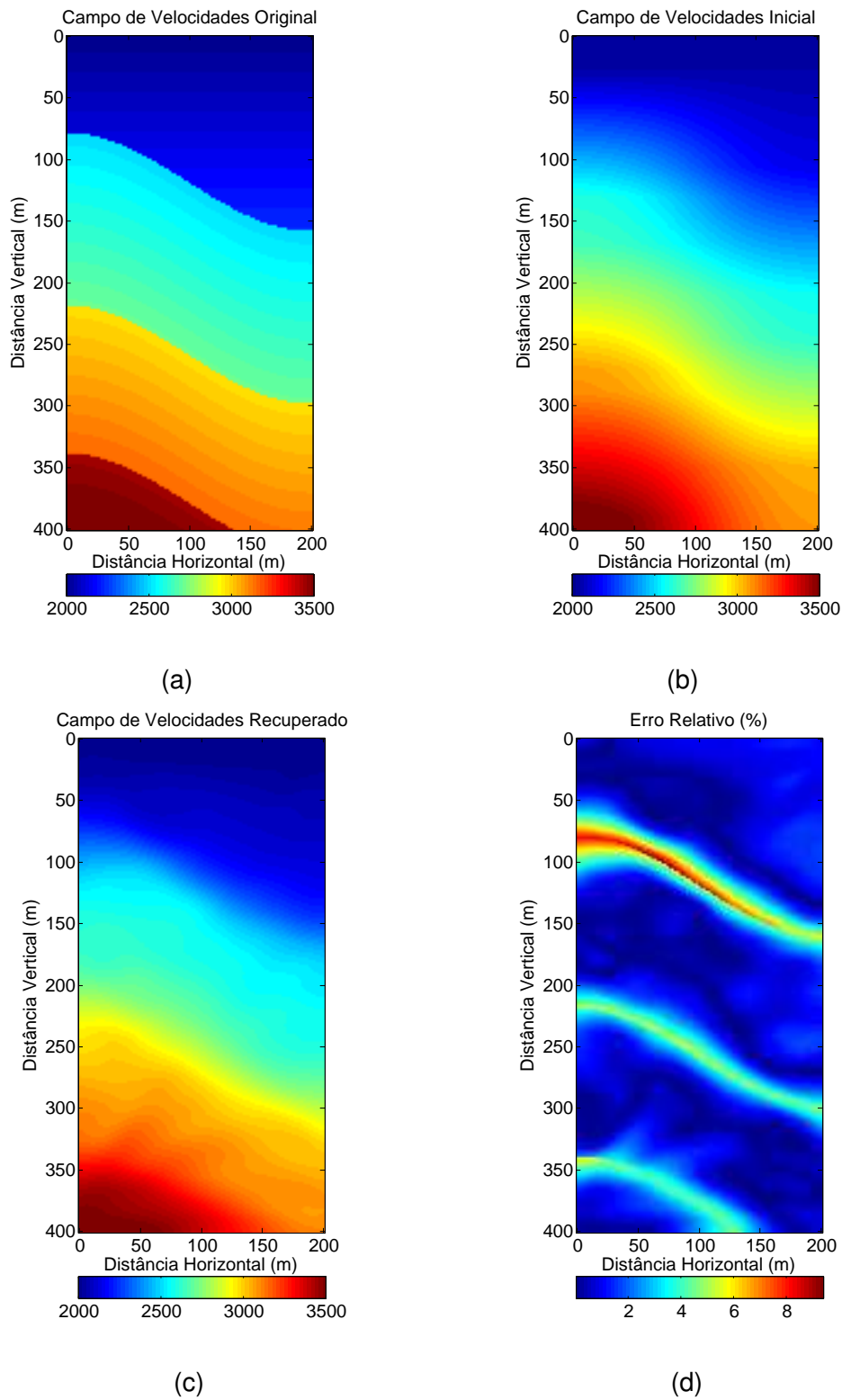


Figura 19: Resultado da Tomografia com o Modelo I no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 1 milissegundo de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

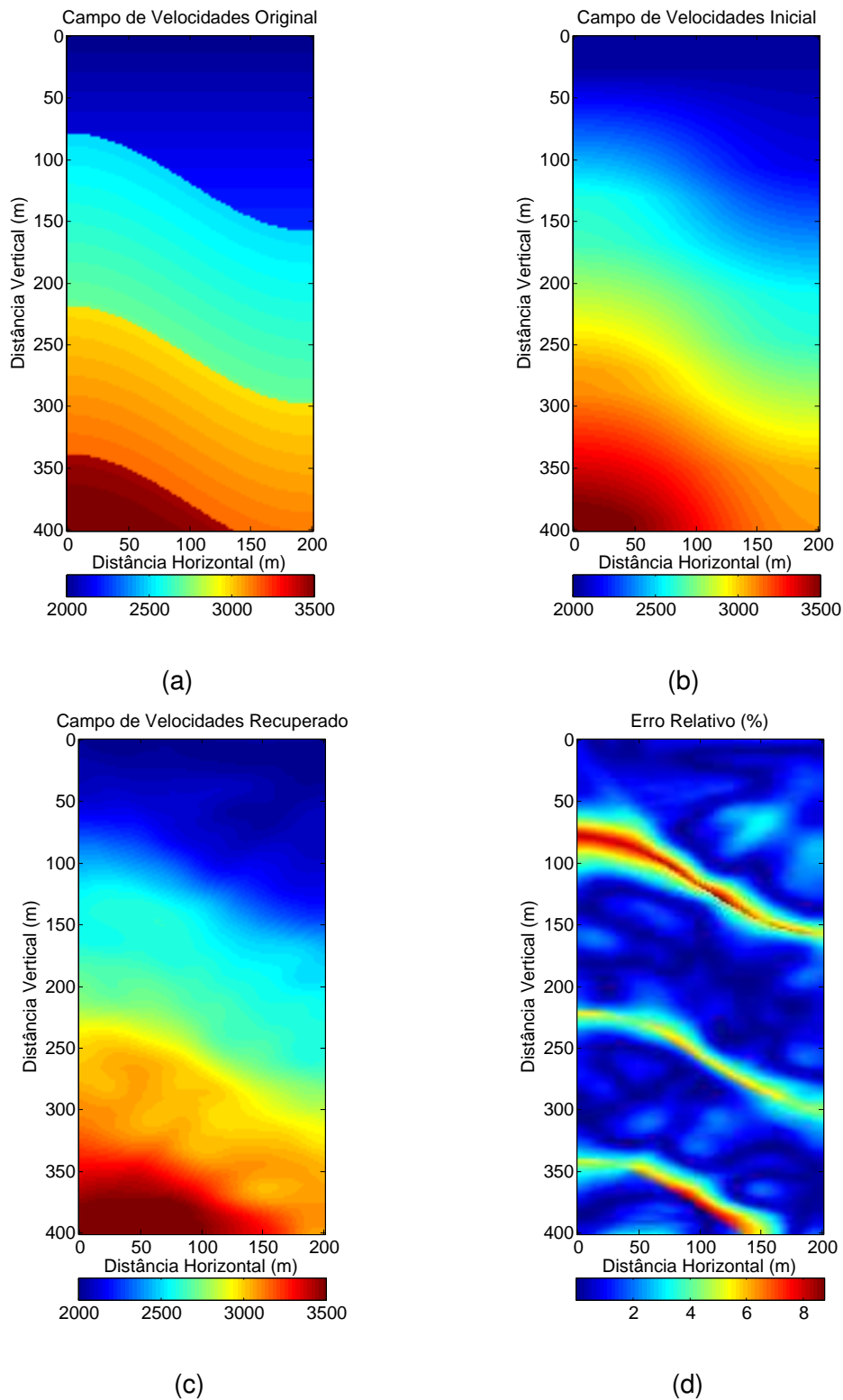


Figura 20: Resultado da Tomografia com o Modelo I no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 2 milissegundos de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

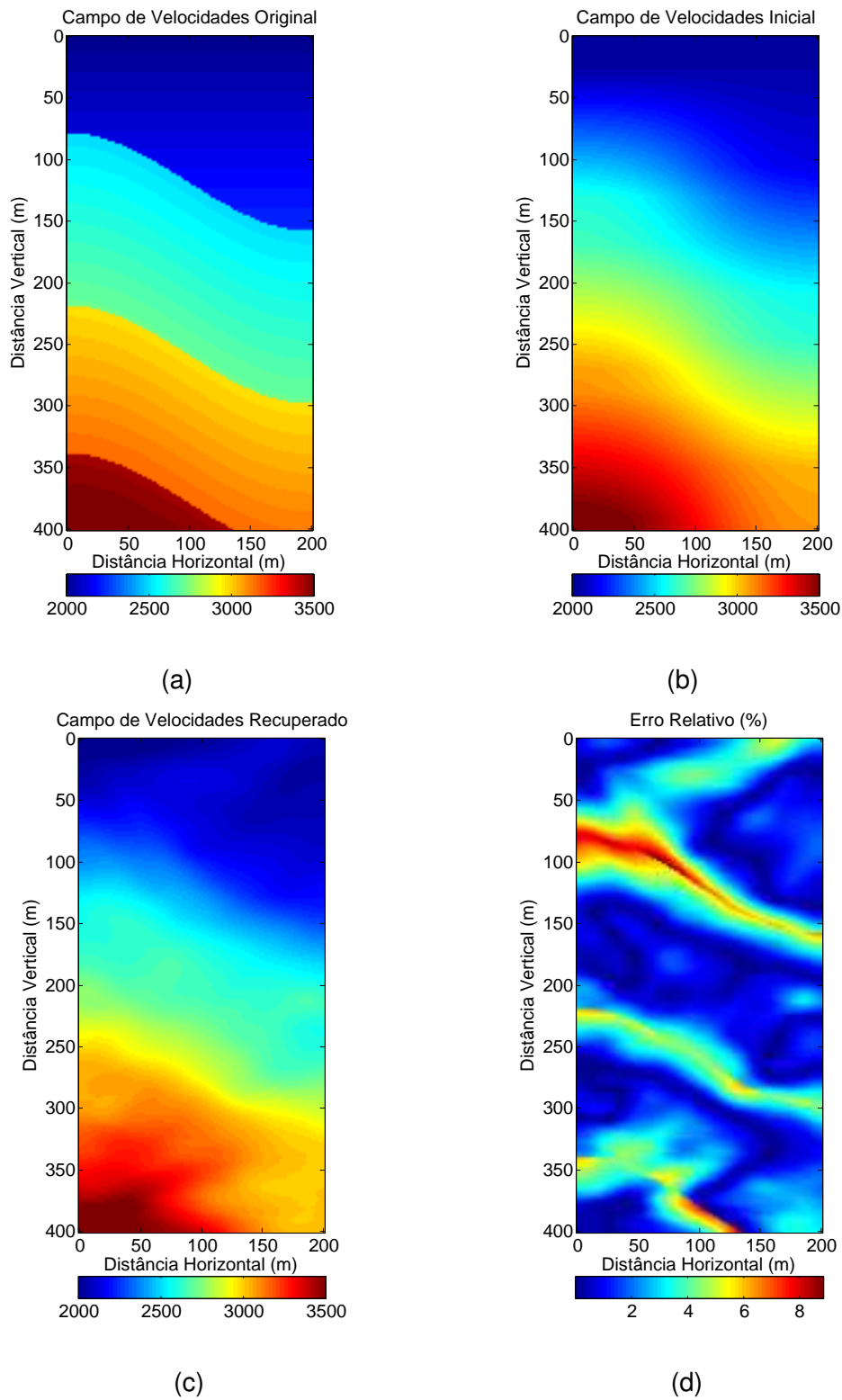


Figura 21: Resultado da Tomografia com o Modelo I no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 5 milissegundos de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

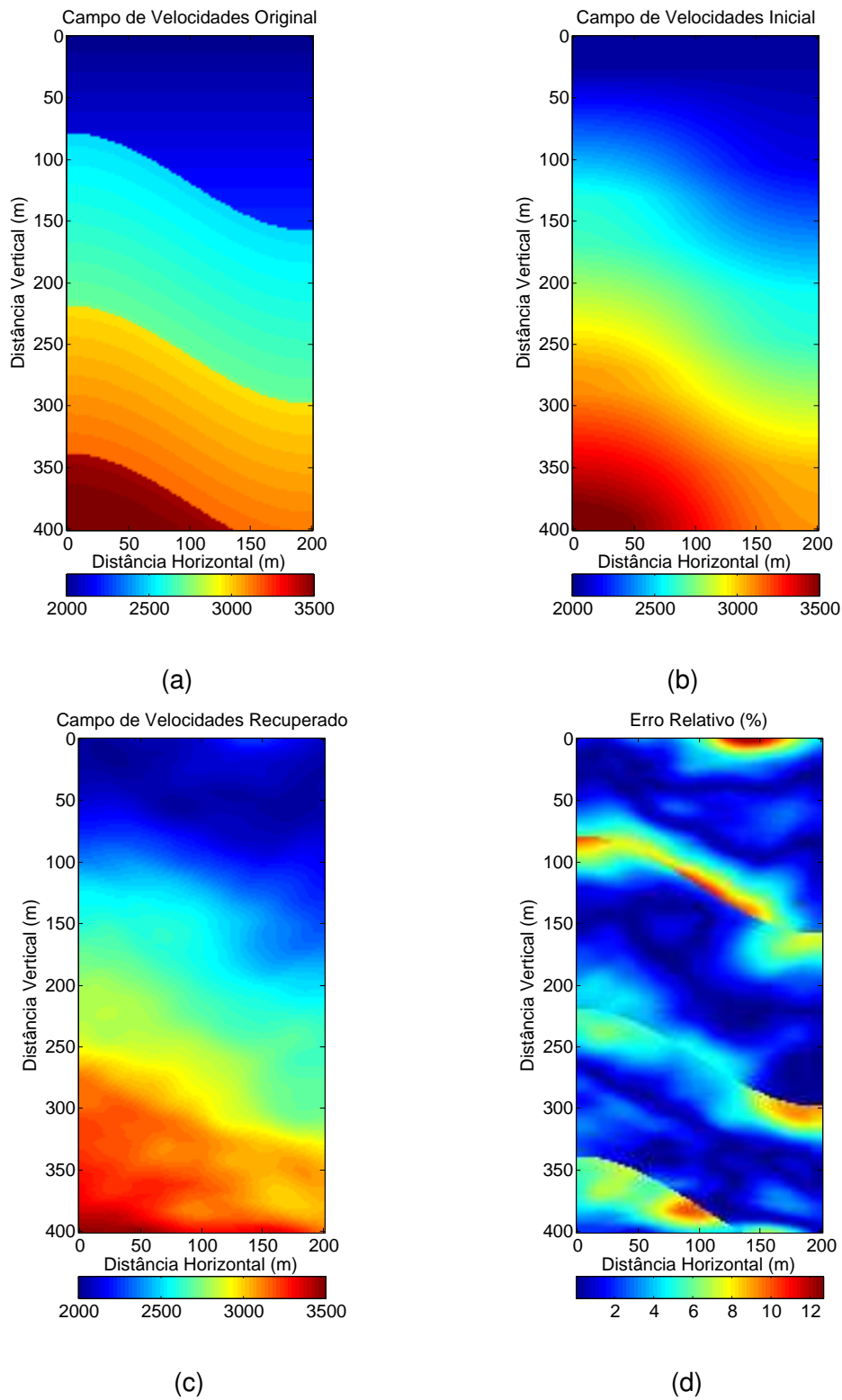


Figura 22: Resultado da Tomografia com o Modelo I no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 10 milissegundos de desvio padrão. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

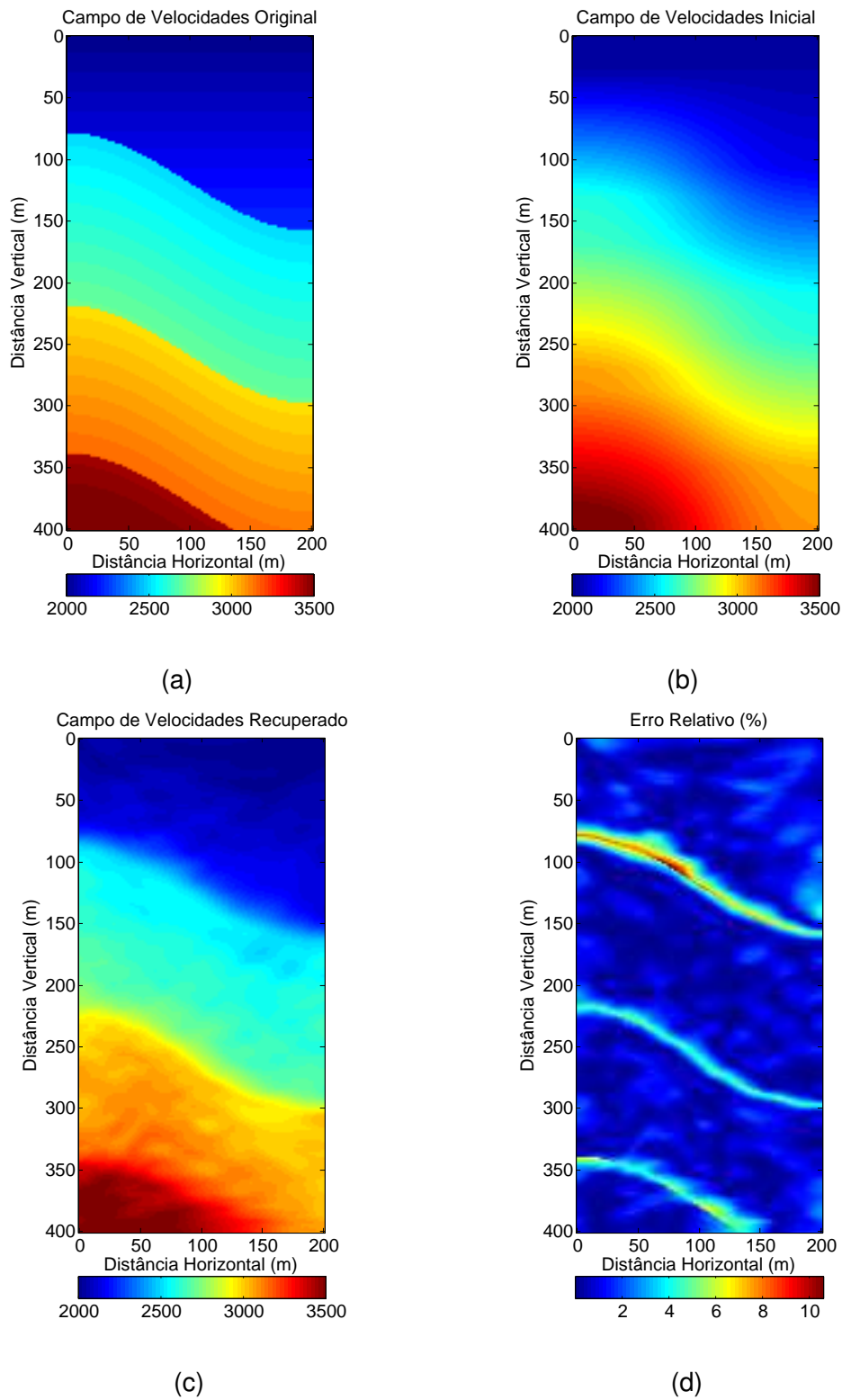


Figura 23: Resultado da Tomografia com o Modelo I no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 1 milissegundo de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

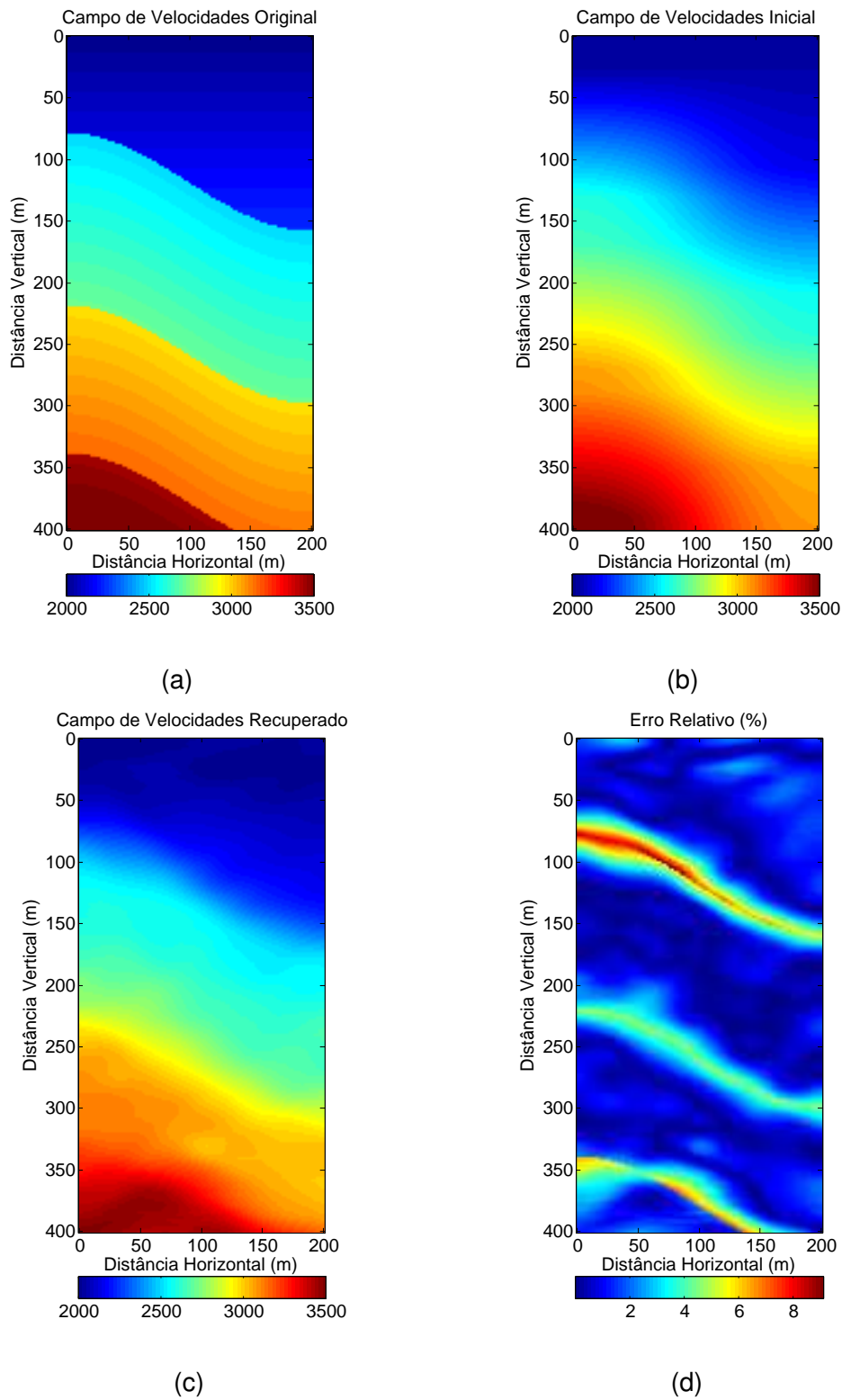


Figura 24: Resultado da Tomografia com o Modelo I no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 5 milissegundos de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

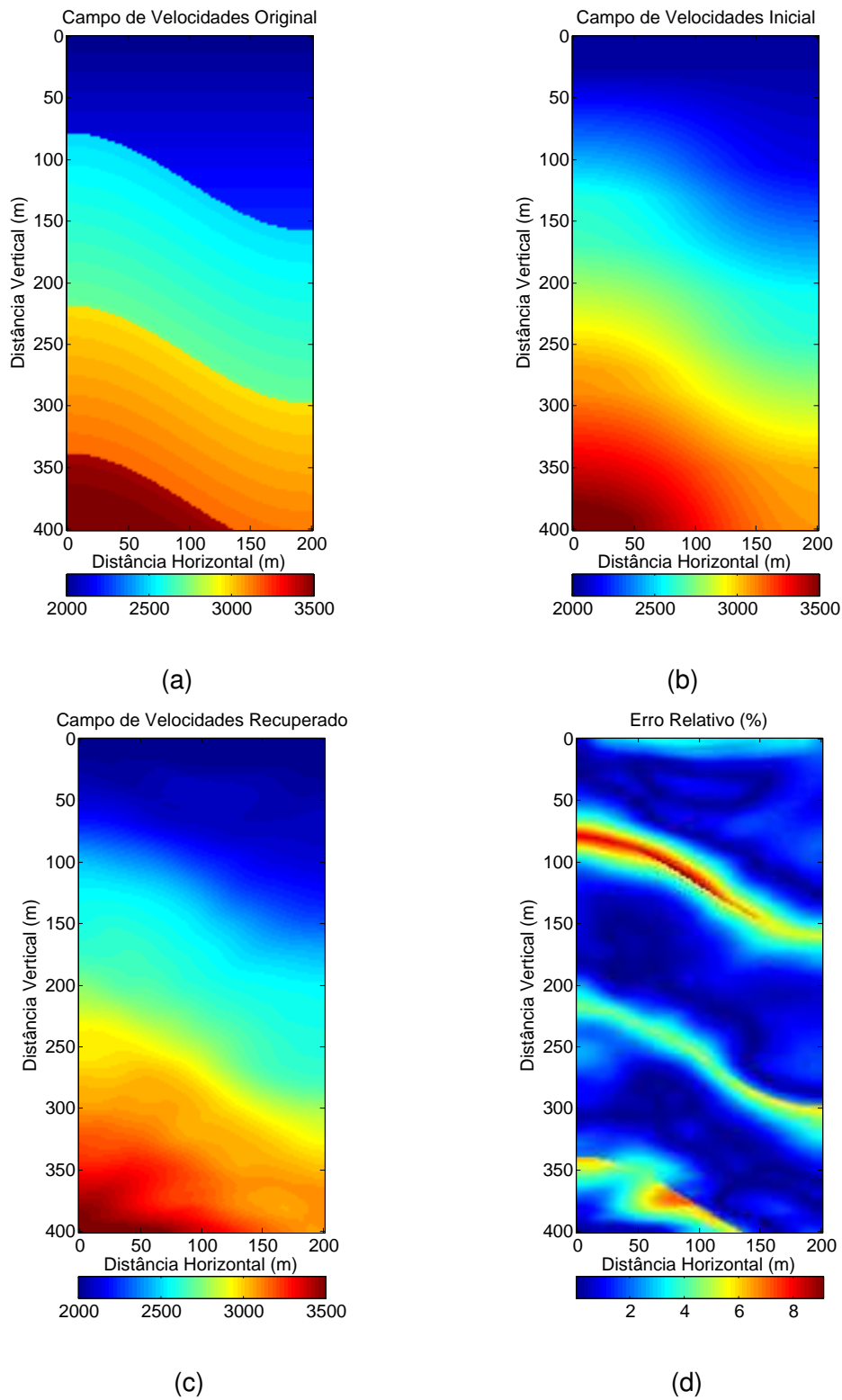


Figura 25: Resultado da Tomografia com o Modelo I no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 10 milissegundos de desvio padrão. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

5.2.1.1 Discussão

Os resultados das tomografias com ruído aleatório no Modelo I são satisfatórios. A técnica foi capaz de identificar a existência das camadas e o resultado tem alguma coerência se comparado com o modelo verdadeiro. Como esperado o resultado com o incremento de ruído foi pior do que os livres de ruído.

Os testes com poucos ruídos resultaram em soluções melhores que as com muito ruído, demonstrando que é melhor é tentar atenuar os ruídos aleatórios antes da tomografia, ou se possível, diminuir seus efeitos durante a aquisição. Também é importante ressaltar que foi necessária uma maior regularização (λ maior e filtro de média móvel maior) do que o teste de mesma geometria, mas livre de ruído. Essa maior regularização explica uma pior resolução nos contatos entre as camadas.

Outro fator importante é que a maior quantidade de raios novamente foi capaz de permitir uma menor regularização e suavização, o que forneceu soluções melhores do que aquela com menos raios. A regularização no caso de 26 fontes e 26 receptores e 10 milissegundos de desvio padrão no ruído foi a mais intensa ($\lambda = 10$ e filtro de média móvel de 5 amostras) e mesmo assim teve o resultado mais distante do verdadeiro em comparação aos demais testes. Isso mostra que dados com muito ruído irão fornecer soluções pobres.

5.2.2 Modelo II

O objetivo do Modelo II ainda se mantém: mapear a anomalia de baixa velocidade que o modelo inicial não contempla. Diferentemente da seção anterior, nesses próximos testes será incrementado um ruído aleatório de distribuição normal e desvio padrão de 1 milissegundo (Figura 26) e de 5 milissegundos (Figura 27).

5.2.2.1 Discussão

O Modelo II se mostrou muito mais sensível aos ruídos que o Modelo I. Porém, foi capaz de identificar a existência de uma anomalia de baixa velocidade nos dois testes realizados. E se este teste fosse um experimento exploratório de hidrocarbonetos a solução seria satisfatória.

Entretanto nota-se uma queda de qualidade na imagem em comparação com o Modelo I e os resultados do Modelo II livres de ruído. Mesmo utilizando uma regulari-

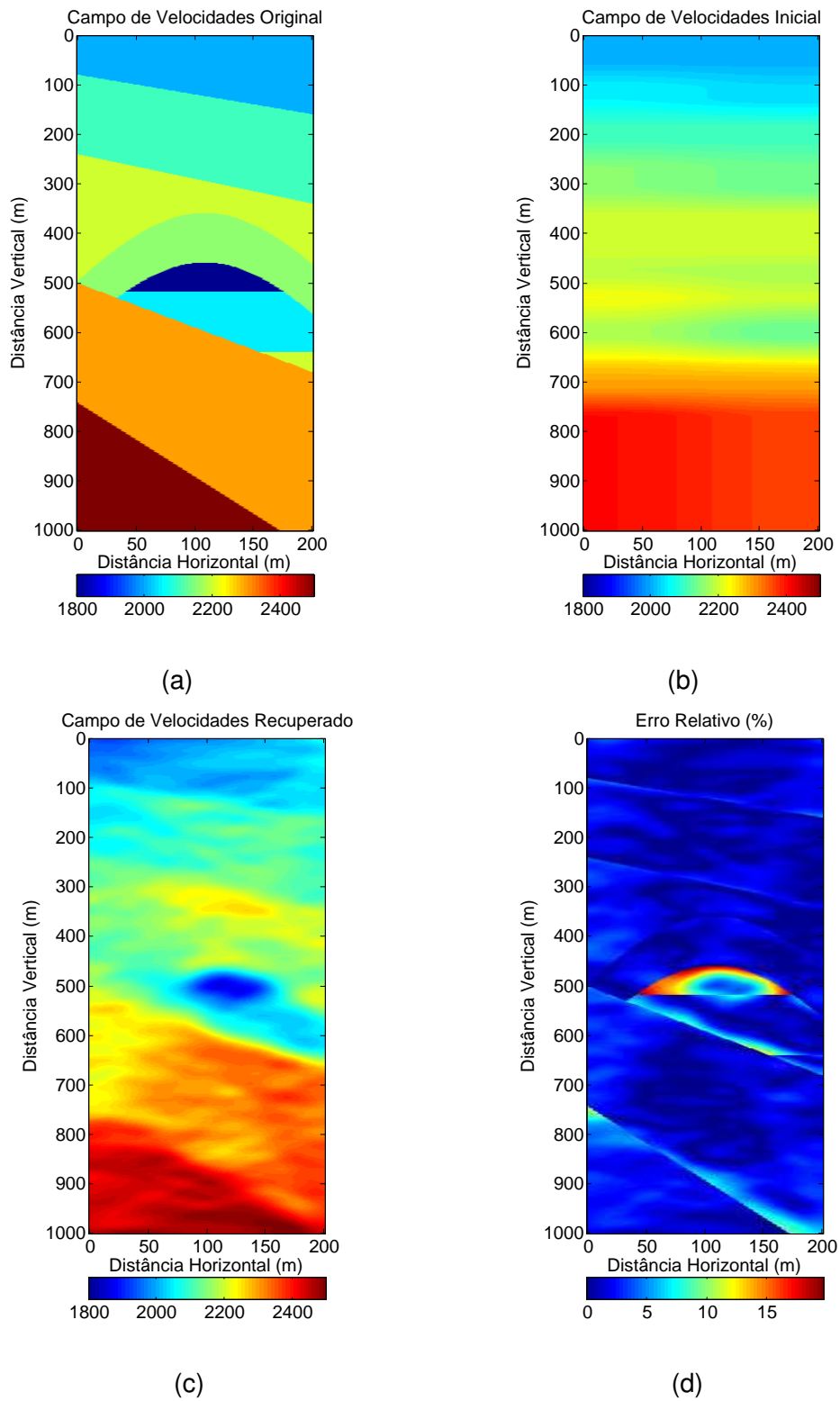


Figura 26: Resultado da Tomografia com o Modelo II no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 1 milissegundo de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

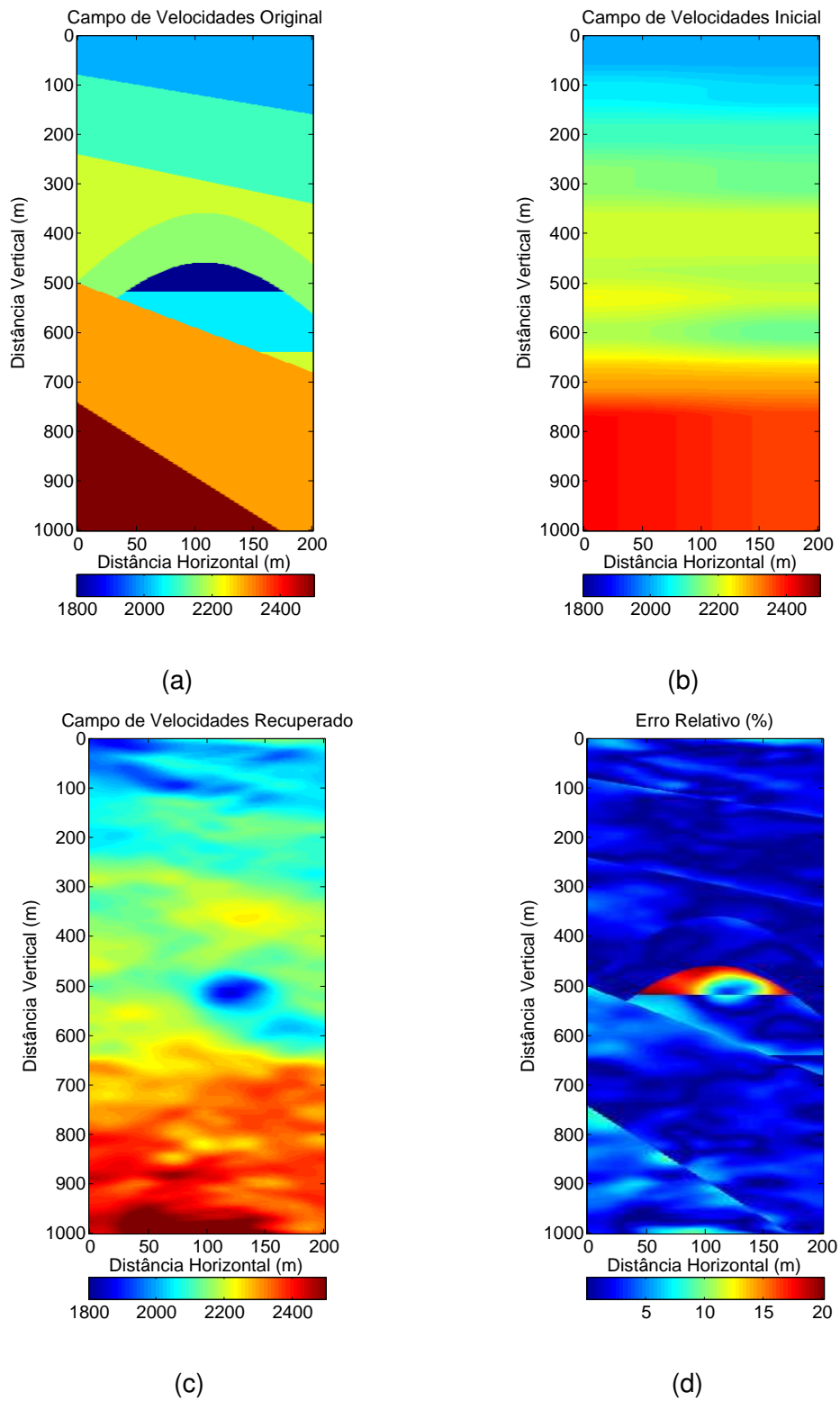


Figura 27: Resultado da Tomografia com o Modelo II no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 5 milissegundos de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

zação bem forte o teste com ruído de 5 milissegundos de desvio padrão não consegue definir o contato entre as duas camadas inclinadas mais profundas. É possível que o modelo inicial utilizado não seja bom o suficiente para que esse contato seja mapeado na solução que a tomografia convergiu.

5.2.3 Modelo III

Uma diferença crucial para o teste com ruídos do Modelo III em relação ao Modelo I e ao Modelo II é a distância horizontal. O Modelo III é maior em tamanho e por isso o tempo de trânsito da onda sísmica é maior. Se no Modelo I o tempo médio era da ordem de 100 milissegundos, no Modelo III esse tempo médio é 400 milissegundos. E isso torna uma variação de 10 milissegundos menos relevante para o Modelo III que para o Modelo I.

Foram efetuados duas tomografias com o incremento de ruído aleatório. O ruído aleatório em uma foi incrementada possuindo um desvio padrão de 1 milissegundo (Figura 28) e outra com 10 milissegundos de desvio padrão (Figura 29).

5.2.3.1 Discussão

Ambas as tomografias do Modelo III resultaram em soluções similares entre os testes com ruídos e sem ruídos. Entretanto, para os testes com ruídos utilizou-se um maior peso na regularização. A semelhança se deu principalmente pelo fato da distância horizontal ser maior que no Modelo I e Modelo II. A utilização de ruídos mais agressivos que o aplicado fugiria do escopo do trabalho por ser irreal e o dado observado estar muito contaminado.

E assim como nas tomografias livres de ruído, o reservatório a profundidade aproximada de 2600 metros foi a região com maior erro relativo. A dificuldade de mapear essa camada é maior no caso com ruído devido a maior suavização e regularização do problema.

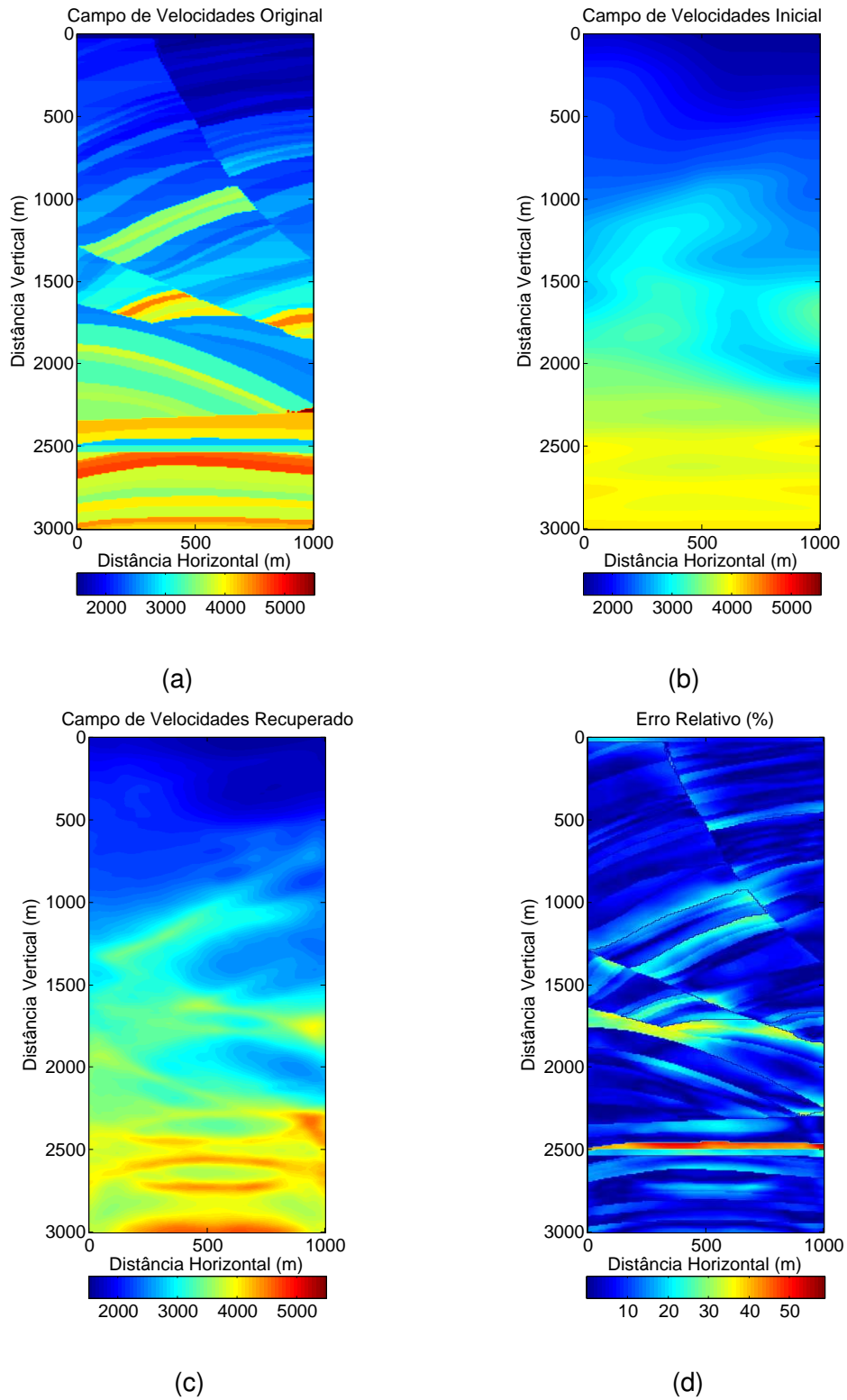


Figura 28: Resultado da Tomografia com o Modelo III no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 1 milissegundo de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

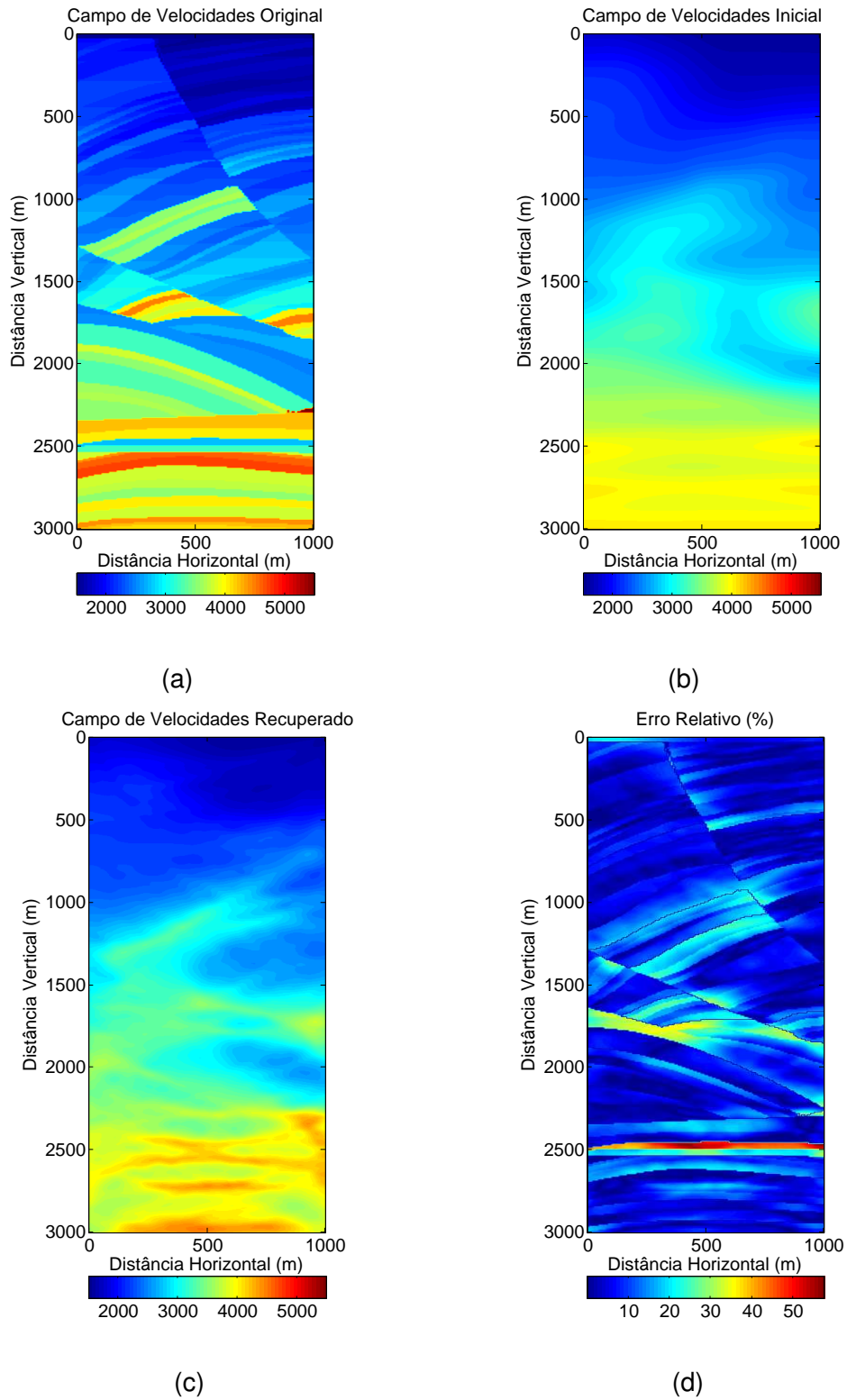


Figura 29: Resultado da Tomografia com o Modelo III no qual o dado observado foi acrescido um ruído aleatório de 10 milissegundos de desvio padrão. (a) Modelo Original de Velocidades. (b) Modelo Inicial para a Tomografia. (c) Resultado da Tomografia. (d) Erro absoluto relativo entre o resultado e o modelo original.

6 Conclusões

O método sísmico, que mede o contraste de propriedades elásticas entre os meios geológicos, é o método geofísico mais empregado atualmente e isso se deve principalmente ao seu sucesso na exploração de novas jazidas de hidrocarbonetos. Uma vez que as jazidas de hidrocarbonetos se encontram cada vez mais em regiões com geologia mais complexa, técnicas mais avançadas para estimar as velocidades sísmicas em sub-superfície são necessárias para se obter uma melhor imagem sísmica. A estimativa das velocidades é importante tanto para a construção da imagem na migração em profundidade quanto para se estimar a litologia.

Nesse trabalho foi abordado, como objetivo secundário, técnicas de traçado de raios e, como objetivo principal, uma técnica para se estimar velocidades de ondas sísmicas compressivas. O traçado de raios baseia-se em aproximações assintóticas da equação da onda e dessa forma, seu bom funcionamento, é limitado a modelos de velocidades suaves e com contrastes pouco abruptos. Entretanto, apesar dessas limitações, ainda é possível traçar raios em modelos mais complexos ao se utilizar algoritmos tais como o empregado nesse trabalho, que traça o raio pela solução aproximada da Equação Eikonal.

Os métodos de traçado de raios que encurvam ou perturbam o raio são muito mais rápidos computacionalmente e, por isso, mostram-se mais eficientes em modelos mais suaves. Essa vantagem de custo computacional pode ser observada principalmente em modelos de três dimensões, que não foram contemplados nesse trabalho. O compromisso entre acurácia, precisão e velocidade de processamento deve existir na hora de se escolher qual método de *raytracing* será empregado.

Apesar de ser um problema mal-posto, e do ponto de vista matemático impossível de ser solucionado, a tomografia pode ser transformada em um problema de otimização que busca minimizar o erro entre o dado observado e o dado calculado. Dessa forma o modelo inicial e as restrições impostas por informações *a priori*, tais como in-

formações de poços e conhecimentos da geologia local, são fundamentais para uma solução satisfatória que faça sentido do ponto de vista geológico. Tais informações se tornam mais importantes ao lidar com dados com ruídos, pois quanto mais próximo o modelo inicial do mínimo global da função objetivo, maior a chance da tomografia convergir para uma boa solução.

A tomografia sísmica por tempos de trânsito, por depender do traçado de raios, resulta em soluções suaves e com poucos contrastes. Como foi exemplificado no Capítulo 5, os maiores erros relativos encontram-se principalmente nas regiões de contato entre as camadas geológicas. Tais erros também são relacionados ao tratamento *a posteriori* a com suavização que prejudica o mapeamento desses contatos entre camadas. O experimento tomográfico deve ser bem planejado para assegurar uma cobertura de raios suficiente no objetivo afim de se obter a resolução desejada. No caso de construções de macro-modelos de velocidade a parametrização por interpolação bilinear pode ser uma boa estratégia, mas conforme se deseja uma maior resolução, existirá a necessidade de uma maior quantidade de parâmetros.

Ressalta-se que embora nesse trabalho só tenha se apresentado geometrias poço a poço, a tomografia por tempos de trânsito pode ser empregadas tanto em geometrias do tipo VSP quanto superfície a superfície.

Para se obter uma melhor resolução são necessárias técnicas mais avançadas de inversão, que utilizam mais informações do campo de onda além do tempo de trânsito, tais como a tomografia de reflexão e a *Full Waveform Inversion* (FWI).

Referências Bibliográficas

BERRYMAN, J. G., 1991, Lectures Notes on nonlinear inversion and tomography, Lecture notes from MIT.

BISHOP, T. N., BUBE, K. P., CUTLER, R. T., LANGAN, R. T., LOVE, P. L., RESNICK, J. R., SHUE, R. T., SPINDLER, D. A. e WYLD, H. W., 1985, Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media, *Geophysics*, Vol. 50, págs 903-923.

BLACKBURN, G., 1980, Erros in stacking velocity - True velocity conversion over complex geologic situations, *Geophysics*, Vol. 45, págs 1465-1488.

CERVENY, V., 2001, *Seismic Ray Theory*, Cambridge University Press.

DIX, C., 1955, Seismic velocities from surface measurements, *Geophysics*, Vol. 20, págs 62-86.

FLETCHER, R. e REEVES, C. M., 1964, Function minimization by conjugate gradients, *The Computer Journal*, Vol. 7, págs 149-154.

HESTENES, M. R. e STIEFEL, E., 1952, Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*;

MACHADO, V. L. A., 2000, *Inversão Híbrida de Dados Sísmicos*, Universidade Federal da Bahia, Dissertação de Mestrado, Salvador.

MARTINS, J. L., 1992, *Mapeamento de Estruturas Internas de Rocha Reservatório Através de Inversão Tomográfica*, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Bahia, Salvador.

MOSER, T. J., NOLET, G. e SNIEDER R., 1992, Ray Bending Revisited, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 82, págs 259-288.

NELDER, J. A e MEAD R., 1965, A simplex method for function minimization, *Computer Journal*, Vol. 7, págs 308-317.

NOCEDAL J. e WRIGHT, S. J., 2006 *Numerical Optimization*, Springer.

PODVIN, P. e LECOMTE I., 1991, Finite difference computation of traveltimes in very constrained velocity models: a massively parallel approach and its associated tools, *Geoph. International Journal*, Vol.105, págs 271-284.

PROTHERO, W. A., TAYLOR W. J. e EICKEMEYER, J. A., 1988, A fast two-point , three-dimensional raytracing algorithm using a simple step search method, *Bulletin of the Seismological Society of. America*, Vol. 78, págs 1190-1198.

SCALES, J. A., 1987, Tomographic inversion via the conjugate gradient method, *Geophysics*, Vol. 52, págs 179-185.

SCALES, J. A., GERZTENKORN A. e TREITEL S., 1988, Fast L_p Solution of Large, Sparse, Linear Systems: Application to Seismic Travel Time Tomography, *J. Comp. Physics*, Vol. 75, págs 314-333.

SCALES, J. A., SMITH, M. L. e TREITEL S., 2001, *Inverse Problem Theory*, Samizdat Press.

TARANTOLA A., 1984, Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation, *Geophysics*, Vol. 49, págs 1259-1266.

TARANTOLA A., 2005, *Inverse Problems Theory and Methods for Model Parameters Estimation*, Society for Industrial and Applied Mathematics.

TIKHONOV, A. N. e V. Y. ARSENIN, V. Y., 1977, *Solutions of Ill-Posed Problems*, 1977, New York, Winston.

UM J. e THURBER C., 1987, A Fast Algorithm for two-point seismic ray tracing, *Bulletin of the Seismological Society of. America*, Vol. 77, págs 972-986.

VIDALE J., 1990, Finite-difference calculation of travel times in 3D, *Geophysics*, Vol 55, págs 521-526.

VIDALE J., 1988, Finite-difference calculation of travel times, *Bulletin of the Seismological Society of. America*, Vol 78, págs 2062-2076.

VIRIEUX J. e OPERTO S., 2009, An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics, *Geophysics*, Vol 74, págs WCC1-WCC26.

ZHOU, H. W., 2003, Multiscale travelttime tomography, *Geophysics*, Vol. 68, págs 1639-1649

APÊNDICE A – Modelagem Sísmica Acústica

Esse apêndice tem como objetivo explicar de forma simples como foi feita a modelagem sísmica pelo método de diferenças finitas para a comparação com os traçados de raios no Capítulo 2.

Temos a equação escalar da onda homogênea:

$$\frac{\partial^2 U(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{x}) \nabla^2 U(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.1})$$

Onde U é o campo de pressão, \mathbf{x} é o vetor posição, t é o tempo e c é a função velocidade.

O operador de segunda derivada é dado por:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} = \lim_{\Delta \omega \rightarrow 0} \frac{\phi(\omega - \Delta \omega) - 2\phi(\omega) + \phi(\omega + \Delta \omega)}{(\Delta \omega)^2} \quad (\text{A.2})$$

Onde ϕ é uma função genérica e ω é uma variável genérica.

Numericamente é impossível que $\Delta \omega$ seja o limite para zero. Para facilitar a notação cria-se os termos A, B e C . Assumindo que o caso é 2-D:

$$A = \frac{U(t - \Delta t, x, y) - 2U(t, x, y) + U(t + \Delta t, x, y)}{(\Delta t)^2} \quad (\text{A.3a})$$

$$B = \frac{U(t, x - \Delta x, y) - 2U(t, x, y) + U(t, x + \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} \quad (\text{A.3b})$$

$$C = \frac{U(t, x, y - \Delta y) - 2U(t, x, y) + U(t, x, y + \Delta y)}{(\Delta y)^2} \quad (\text{A.3c})$$

Substituindo na equação da onda e ignorando os limites para zero:

$$A = c^2(x, y) [B + C] \quad (\text{A.4})$$

Abrindo o termo A e isolando o campo em tempo $t + \Delta t$ para que fique em função dos campos de onda nos tempos t e $t - \Delta t$:

$$U(t + \Delta t, x, y) = (\Delta t)^2 c^2(x, y) [B + C] - U(t - \Delta t, x, y) + 2U(t, x, y) \quad (\text{A.5})$$

As condições de dispersão numérica é dada pela fórmula (assumindo que $\Delta x = \Delta y = h$):

$$h \leq \frac{V_{min}}{\alpha f} \quad (\text{A.6})$$

Onde f é a frequência de corte, V_{min} é a menor velocidade no modelo de velocidades e α é um parâmetro empírico que determina a quantidade de pontos da malha são necessários para amostrar o menor comprimento de onda. No Capítulo 2 o valor de α igual a cinco se mostrou satisfatório. Já o critério de estabilidade é dado por:

$$\Delta t = \frac{h}{\beta V_{max}} \quad (\text{A.7})$$

Sendo que V_{max} é a velocidade máxima do modelo de velocidades e β é um parâmetro empírico que determina quantos intervalos de tempo são necessários para que a frente de onda percorra a distância entre dois pontos da malha. O valor de β de 1,6 mostrou-se satisfatório para manter o método numérico estável.