

VICTOR THADEU XAVIER DE ALMEIDA

**Tomografia sísmica de superfície: modelagem direta  
calculando as trajetórias de ondas refratadas**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-graduação em Geologia e Geofísica Marinha da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências (M. Sc.) Área de Concentração: Geologia e Geofísica Marinha.

Orientador: Professor Dr. Marco Antonio Cetale Santos

Niterói

2013

---

VICTOR THADEU XAVIER DE ALMEIDA

Tomografia sísmica de superfície: modelagem direta calculando as trajetórias de ondas refratadas/ VICTOR THADEU XAVIER DE ALMEIDA. – Niterói, 2013-

98 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Professor Dr. Marco Antonio Cetale Santos

Dissertação (Mestrado) – , 2013.

1. Ondas refratadas. 2. Tomografia sísmica. I. Orientador. II. Universidade Federal Fluminense. III. Departamento de Geologia e Geofísica. IV. Título

---

**VICTOR THADEU XAVIER DE ALMEIDA**

**Tomografia sísmica de superfície: modelagem direta  
calculando as trajetórias de ondas refratadas**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-graduação em Geologia e Geofísica Marinha da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências (M. Sc.) Área de Concentração: Geologia e Geofísica Marinha.

Aprovado em Niterói, 17 de outubro de 2013:

---

**Professor Dr. Marco Antonio Cetale  
Santos**

Orientador - Departamento de Geologia e  
Geofísica/LAGEMAR-UFF

---

**Dr. André Bulcão**  
Petrobras

---

**Dr. Djalma Manoel Soares Filho**  
Petrobras

---

**Professor Dr. Jorge Leonardo Martins**  
Observatório Nacional

Niterói  
2013

*Dedicado à memória de minhas tias Francisca e Irene, que muito me ensinaram.*

# Agradecimentos

Escrever os agradecimentos foi a parte mais relaxante da dissertação por três motivos: foi quando terminei de escrever (ou quase); é quando pude sair um pouco do tecnicismo; pude lembrar como foi o caminho até aqui. Certamente não citarei o nome de todos que foram importantes para eu chegar até aqui (acho que quase todos que conheci), mas falarei dos que lembro neste momento (na ordem que lembro).

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador, Marco Cetale, por ter superado às minhas expectativas como orientador e também ter se tornado um amigo. Além de orientar esse trabalho, sempre esteve disposto a discutir e dar conselhos em relação à minha futura carreira na área de Geofísica. Ele também buscou motivar todos os seus alunos nos momentos mais difíceis, o que foi importante para mim. Outro incentivo importante foi a participação no Capítulo Estudantil da SEG.

Outra pessoa à quem agradeço foi o Marcílio, sem o qual eu dificilmente teria conhecido o Cetale e a UFF, talvez até mesmo a Geofísica.

A todos os integrantes do Grupo ISIS (Imageamento Sísmico e Inversão Sísmica), em especial ao Professor Jorge Leonardo pelas discussões, sugestões e dúvidas tiradas, tudo muito importante para este e futuros trabalhos. Aos amigos que também participaram do grupo e já se formaram: Kristoffer, Capucci, Samuel e Rafael. Novamente ao Felipe Capucci, pelas sugestões, dúvidas tiradas, esclarecimentos e dicas (ou 'pulos do gato'), todas fundamentais para superar dificuldades encontradas neste trabalho e que ajudaram muito.

Aos amigos (também do ISIS) Denis e Jaqueline, pelas discussões e sugestões (em especial as dúvidas de Matlab que o Denis sempre responde). Além é claro da companhia para os almoços e lanches, principalmente no “sujinho” (apelido “carinhoso” dado ao self-service da Praia Vermelha). Claro que também são dois novos amigos que espero continuar a ver.

Aos alunos de graduação em Geofísica (são muitos que conheci), em especial Victor Martins, Jonatan, Marcelle, Vinicius, Rodrigo, Jonne, Renan, Igor e outros. Aprendi muito de Geofísica com eles, apesar de na maioria das vezes eles acharem que eu sabia mais só por estar no mestrado.

O Lagemar também foi muito importante para a minha formação não apenas pela formação acadêmica tradicional, mas também pelo ambiente proporcionado. Desde o primeiro período no departamento tive contato com profissionais da indústria, inclusive com

cursos e palestras dadas por profissionais do exterior. Essas experiências foram extremamente importantes para os meus objetivos profissionais. Aos Professores e funcionários do Departamento meu obrigado.

Ao Professor Rogério Santos devo um agradecimento especial, pelo aprendizado nas disciplinas em que sua experiência como Geofísico na Petrobras foram muito enriquecedoras para minha formação. Além disso, tive a oportunidade de trabalhar sob sua orientação na competição da AAPG, sem dúvida um trabalho que fez toda a diferença para minha formação e amadurecimento profissional, principalmente em relação a como é o trabalho no mundo real. Enfim, ao Rogério meu sincero agradecimento. Também foi nesse trabalho que fiz novos amigos: Carlos, Elisa, Zaida e Flávio.

Ao CefeteQ (atual IFRJ), à UFRJ e ao Instituto de Física da UFRJ, instituições que tenho orgulho de ter frequentado.

Ao meu orientador durante a graduação na UFRJ, Luca Moriconi. À Professora Sandra Amato, com quem comecei a aprender programação e sem dúvida uma das melhores Professoras que tive. À Professora Wania Wolff, pelo incentivo e amizade.

Aos muitos amigos que fiz na pós-graduação da UFF: Felipe, Flávio Oliver, Marcella, Fábio, Alberto, Roberto, Carolina, Antonio, Manuela, Sthephanie... A todos os meus amigos desde o Cefeteq (Rodrigo, Thiago, Victor, Ramon, Érica, Gláucia, Bruno,...) até a UFRJ (Danielle, Carlos, Cauê, Thaise, Pablo, Renato, Gabriela,...), em especial aos com quem convivi mais nos últimos anos: João, Luana, Loloano, Vanderlei e Cleiton.

À Luana e à Danielle pela ajuda com o Latex, figuras e revisão do texto; e à Jaqueline também pela ajuda na revisão do texto.

À minha madrinha Rosa, que me acompanha desde recém-nascido (Faz tempo mesmo!). Além disso, junto com meu primo Alexandre, me deram abrigo muitas vezes aqui em Niterói.

Aos meus primos Eduardo e Maysa.

À minha namorada, Ihani, que além de grande amiga, sempre me apoiou nos momentos mais difíceis. Além é claro da paciência que teve comigo nos momentos mais *stressantes*.

Aos meus pais, Ana e José, que fizeram muitos sacrifícios, financeiros e pessoais, para que eu tivesse uma boa educação, tendo me dado todas as oportunidades que precisei. Hoje também percebo o quanto devo a eles minhas virtudes (e claro que alguns dos defeitos). Além disso, sempre me apoiam em minhas decisões, mesmo quando não podem entendê-las.

À Capes e à Petrobras pelo apoio financeiro e de infraestrutura para o desenvolvimento deste trabalho.

*Eppur si muove.*  
Galileu Galilei

Tabacaria  
*Não sou nada.*  
*Nunca serei nada.*  
*Não posso querer ser nada.*  
*À parte isso, tenho em mim todos os sonhos do mundo.*  
[...]  
Fernando Pessoa

# Resumo

A etapa de migração no processamento dos dados sísmicos tem seu resultado diretamente relacionado ao modelo de velocidades usado, por isso obter um modelo de velocidades em subsuperfície é fundamental para garantir a qualidade final dos dados sísmicos processados. Atualmente, a *Full Waveform Inversion* (FWI) pode fornecer os melhores resultados, mas um dos desafios para um bom resultado via FWI é um bom modelo inicial o qual pode ser obtido por outra técnica de tomografia sísmica. A tomografia de refração, em que os tempos de primeira chegada (*first breaks*) são os únicos dados usados, pode fornecer modelos de velocidade com grande acurácia, principalmente para profundidades rasas. Dentre as vantagens da tomografia de refração destaca-se o uso dos tempos de primeira chegada, os quais sempre são obtidos como um etapa do processamento sísmico, além da possibilidade de serem obtidos de forma automática. Assim, a tomografia de refração é um método mais automático, em oposição, por exemplo, a tomografia de reflexão. Esta última exige a marcação das reflexões em cada iteração tomográfica, o que torna o método mais trabalhoso e dependente da interpretação manual. Neste trabalho, implementou-se a tomografia de refração via Método Gradiente Conjugado, em que o traçamento de raios funciona inclusive para contrastes altos de velocidade. Os algoritmos foram validados com testes de cobertura total, os quais permitem avaliar as limitações destes mesmos algoritmos. A fim de se obter resultados melhores, a regularização de Tikhonov da tomografia de refração foi testada, assim como tratamentos *a posteriori* e variações na geometria de aquisição.

**Palavras-chaves:** tomografia. refração. regularização. Tikhonov.

# Abstract

The migration step in seismic data processing has its results directly related to the used velocity model, so to obtain a subsurface velocity model is fundamental for the final quality of the processed seismic data. Nowadays, the Full Waveform Inversion (FWI) can give the best results, but one of the challenges for a good result via FWI is a good starting model, that can be obtained by other tomographic techniques. Refraction tomography, in which first arrival traveltimes (first breaks) are the only used data, is able to give accuracy results, mainly for shallow depths. Among the advantages of refraction tomography, one of the main is the use of first arrival traveltimes, which are always obtained as a step in seismic data processing, besides the possibility of being obtained automatically. Then, refraction tomography is a more automatic method, in opposition, e.g., to reflection tomography. The latter needs reflection picking for each tomography iteration step, what makes this method more expensive and dependend on manual interpretation. In this work, refraction tomography via Conjugate Gradient Method is implemented, with the ray tracing method used even able to account high velocity contrasts. The algorithms were validated with full cover geometry, and they allowed to assess the limits of these algorithms. In order to improve results, Tikhonov regularization in refraction tomography was tested, as well as *a posteriori* treatment and geometry variation.

**Key-words:** tomography. refraction. regularization. Tikhonov.

# Lista de ilustrações

- Figura 1 – Abaixo: modelo de duas camadas com velocidades  $V_1$  e  $V_2$ . Fonte sísmica localizada em  $O$  e receptores entre  $B$  e  $R''$ . Acima: gráfico com o tempo de chegada dos raios aos receptores;  $X$  é a distância entre a fonte  $O$  e algum ponto da superfície;  $X'$  é a distância mínima para a chegada da onda refratada;  $X_c$  é a distância a partir da qual a onda refratada é a primeira chegada nos detectores;  $\theta_c$  é o ângulo crítico, no qual ocorre a refração. Figura adaptada de Sheriff (1995). . . . . 21
- Figura 2 – Incidência da onda sísmica com o ângulo  $\theta_c$  e determinação da frente de onda que retorna a superfície (onda refratada). Pelo princípio de Huygens determina-se que o ângulo  $\theta$  é igual à  $\theta_c$ . Figura adaptada de Telford et al. (1990). . . . . 22
- Figura 3 – Abaixo: modelo de três camadas com velocidades  $V_3 > V_2 > V_1$ . Acima: gráfico com o tempo de chegada dos raios refratados aos receptores, em que o eixo horizontal é a distância entre a fonte  $O$  e algum ponto da superfície (direção horizontal  $\overline{OR'}$ ). Figura adaptada de Sheriff (1995). 24
- Figura 4 – Abaixo: modelo de duas camadas com velocidades  $V_2 > V_1$  e interface com ângulo de inclinação  $\xi$ . Acima: gráfico com o tempo de chegada dos raios refratados aos receptores, com a fonte em  $A$ , receptor em  $B$  ( $t_a$ ) e fonte em  $B$ , receptor em  $A$  ( $t_u$ );  $X$  é a distância entre a fonte e o receptor. Figura adaptada de Telford et al. (1990). . . . . 25
- Figura 5 – Figura adaptada de Yilmaz (2001a). . . . . 27
- Figura 6 –  $\theta_n$  é o ângulo de mergulho da  $n$ -ésima interface;  $\alpha_n$  é o ângulo formado pelo raio com a  $n$ -ésima interface, à direita do ponto  $G$ ;  $\alpha_n$  é o ângulo formado pelo raio com a  $n$ -ésima interface, à esquerda do ponto  $G$ ;  $Z_n P$  é a menor distância entre a interface  $n$  e  $n - 1$ , considerando o ponto  $P$  como referência para determinar o primeiro valor  $Z_1 P$ , o qual determina o ponto de origem para a distância  $Z_n P$  seguinte. Figura adaptada de Palmer (1981). . . . . 28
- Figura 7 – Discretização do modelo de velocidades para a tomografia por tempo de trânsito. Mostra-se a escolha feita para identificar cada célula do modelo e como é definido cada componente da matriz  $L$ . Mostra-se o  $i$ -ésimo raio que cruza o modelo. Figura adaptada de Berryman (1991). 43

Figura 8	– Representação da função erro em duas dimensões de acordo com a classificação de Ivanov et al. (2005a). (a) Função erro para não-unicidade tipo A; (b) Função erro para não-unicidade tipo B, $\mathbf{X}$ indica um mínimo global; (c) Função erro para não-unicidade tipo C, $\mathbf{X}$ indica os vários mínimos globais; (d) Função erro para não-unicidade tipo D. Figuras adaptadas de Ivanov et al. (2005a). . . . .	46
Figura 9	– Figura que mostra os três modelos que podem gerar os mesmos tempos de trânsito de ondas refratadas. $h_i$ é a espessura da camada e $V_i$ é a velocidade da camada, onde $i$ pode ser 1, 2 ou 3. (a):cada camada com uma velocidade diferente e velocidade maior conforme aumenta a profundidade. (b):a segunda camada tem a mesma velocidade da primeira (ou seja, tem-se apenas duas camadas). (c): a segunda camada tem uma velocidade baixa. Figura retirada de Ivanov et al. (2005b). . .	48
Figura 10	–Ponto $P$ é onde se quer calcular o tempo de trânsito, a partir dos tempos conhecidos (pontos escuros). Terminologia da malha ilustrada está descrita no texto. Adaptado de Podvin e Lecomte (1991) . . . . .	52
Figura 11	–Valor médio da diferença entre os tempos de trânsito em toda a malha entre duas iterações sucessivas em função do número de iterações, para uma malha quadrada com 1000 células em cada lado. . . . .	54
Figura 12	–Trajetória de um raio nas proximidades da fonte. Percebe-se como a direção varia conforme a fonte fica mais próxima. . . . .	55
Figura 13	–Resultado do traçamento de raios com o algoritmo usado em um modelo de exemplo. . . . .	56
Figura 14	–Algoritmo tomográfico utilizado. . . . .	57
Figura 15	–Primeiro modelo usado na validação do algoritmo tomográfico e geometria de aquisição para cobertura total. (a) Modelo de velocidades original. (b), (c), (d) Posições das fontes (*) e receptores ( $\blacktriangledown$ ). . . . .	63
Figura 16	–Tomografia com cobertura total sem tratamento <i>a posteriori</i> . (a) Modelo obtido após 20 iterações. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	64
Figura 17	–Tomografia com cobertura total, suavização com $win = 5$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações com suavização. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	65
Figura 18	–Tomografia com cobertura total sem suavização para dados com ruído aleatório. (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	66

Figura 19	– Tomografia com cobertura total para dados com ruído aleatório, suavização com $win = 5$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	67
Figura 20	– Modelo de velocidades de camadas plano paralelas horizontais, como gradiente vertical de velocidade. . . . .	68
Figura 21	– Tomografia com cobertura total sem tratamento <i>a posteriori</i> e sem restrições no GC. (a) Modelo obtido após 3 iterações. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	69
Figura 22	– Tomografia com cobertura total, suavização com $win = 5$ , mas sem restrições no GC. (a) Modelo obtido após 9 iterações com suavização. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	70
Figura 23	– Tomografia com cobertura total sem tratamento <i>a posteriori</i> , mas com restrições no GC. (a) Modelo obtido após 3 iterações. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	71
Figura 24	– Tomografia com cobertura total, suavização com $win = 5$ e com restrições no GC. (a) Modelo obtido após 8 iterações com suavização. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	72
Figura 25	– Tomografia com regularização de Tikhonov de primeira ordem, $\lambda = 2, 0$ , sem suavização. (a) Modelo obtido após 9 iterações. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	73
Figura 26	– Tomografia com regularização de Tikhonov de primeira ordem, $\lambda = 2, 0$ , e suavização, $win = 5, 0$ . (a) Modelo obtido após 9 iterações. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	74
Figura 27	– Tomografia para dados com ruído, com regularização de Tikhonov de primeira ordem, $\lambda = 2, 0$ , e suavização, $win = 5$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	75
Figura 28	– Tomografia para dados com ruído, com regularização de Tikhonov de primeira ordem, $\lambda = 5, 0$ , e suavização, $win = 5$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	76
Figura 29	– Modelo de velocidades original usado na tomografia de refração e geometria de aquisição. A profundidade do conjunto fonte - receptores é fixa (40 metros em relação ao limite horizontal superior). . . . .	77
Figura 30	– Tentativa mal sucedida de tomografia de refração. Observa-se que a suavização não foi aplicada em toda a região com cobertura. (a) Modelo inicial usado para a tomografia. (b) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (c) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	78

Figura 31 – Tomografia de refração com a suavização aplicada em toda a região com cobertura. (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (c) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	79
Figura 32 – Tomografia de refração para aquisição com espaçamento mínimo entre cada tiro, num total de 88 tiros. (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	80
Figura 33 – Tomografia de refração para aquisição com espaçamento mínimo entre cada tiro, num total de 176 tiros. (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	80
Figura 34 – Tomografia de refração com outro modelo inicial e 12 tiros. (a) Modelo inicial usado para a tomografia. (b) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (c) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	81
Figura 35 – Tomografia de refração para aquisição com total de 12 tiros, $\lambda = 5, 0$ e suavização, $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 12 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . .	82
Figura 36 – Tomografia de refração para aquisição com total de 12 tiros, $\lambda = 20, 0$ e suavização, $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . .	83
Figura 37 – Tomografia de refração para aquisição com total de 12 tiros, $\lambda = 100, 0$ e suavização, $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . .	83
Figura 38 – Tomografia de refração para aquisição com espaçamento mínimo entre cada tiro (total de 88 tiros), $\lambda = 20, 0$ e suavização, $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	84
Figura 39 – Tomografia de refração para aquisição com espaçamento mínimo entre cada tiro (total de 88 tiros), $\lambda = 20, 0$ e suavização, $win = 3$ . A matriz regularizante, derivada primeira foi considerada num esquema adiantado ( <i>forward scheme</i> ) ao invés de diferença centrada ( <i>centered difference</i> ), usado em todos os outros testes. (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	85
Figura 40 – Tomografia com regularização de Tikhonov de ordem 2 para aquisição com espaçamento mínimo entre cada tiro (total de 88 tiros), $\lambda = 20, 0$ e suavização, $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . .	85

Figura 41 – Modelo de velocidades original (modelo 2) usado na tomografia de refração. . . . .	86
Figura 42 – Tomografia sem qualquer regularização, $win = 3$ . (a) Modelo inicial para a tomografia. (b) Modelo obtido após 19 iterações tomográficas. (c) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . .	86
Figura 43 – Tomografia de refração, $\lambda = 20,0$ e suavização, $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 17 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	87
Figura 44 – Tomografia de refração, $\lambda = 40,0$ e suavização, $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 17 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	88
Figura 45 – Modelo de velocidade original (modelo 3) usado na tomografia de refração.	88
Figura 46 – Tomografia sem qualquer regularização, $win = 3$ . (a) Modelo inicial para a tomografia. (b) Modelo obtido após 19 iterações tomográficas. (c) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . .	89
Figura 47 – Tomografia de refração, $\lambda = 20,0$ e suavização, $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	90
Figura 48 – Tomografia de refração, $\lambda = 40,0$ e suavização, $win = 3$ , após 20 iterações. (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	91
Figura 49 – Tomografia de refração, $\lambda = 40,0$ e suavização, $win = 3$ , após 5 iterações. (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia. . . . .	91

# Lista de abreviaturas e siglas

GRM	<i>Generalized Reciprocal Method</i>
MGC	Método Gradiente Conjugado
GC	Método Gradiente Conjugado
GCMQ	Método Gradiente Conjugado para Mínimos Quadrados
CGLS	<i>Conjugate Gradient Least Squares</i>
FWI	<i>Full Waveform Inversion</i>

# Sumário

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>1 Refração em sísmica</b> . . . . .	<b>20</b>
1.1 Eventos no sismograma . . . . .	20
1.2 Refração . . . . .	21
1.2.1 Refração em uma interface plana horizontal . . . . .	22
1.2.2 Refração em várias interfaces planas horizontais . . . . .	23
1.2.3 Refração em interfaces planas inclinadas . . . . .	25
1.3 Interpretação geológica com ondas refratadas . . . . .	26
1.3.1 Método mais-menos . . . . .	27
1.3.2 Método recíproco generalizado . . . . .	28
<b>2 Teoria da inversão e tomografia</b> . . . . .	<b>30</b>
2.1 Problemas Inversos . . . . .	30
2.1.1 Problema mal posto . . . . .	31
2.1.1.1 Existência . . . . .	31
2.1.1.2 Unicidade . . . . .	31
2.1.1.3 Estabilidade . . . . .	32
2.1.2 Solução de problemas mal-postos . . . . .	32
2.1.3 Regularização . . . . .	33
2.1.3.1 Regularizadores de Tikhonov . . . . .	33
2.1.3.2 Regularizador de Berryman . . . . .	34
2.2 Solução de problemas inversos . . . . .	35
2.2.1 Inversão linear . . . . .	35
2.2.2 Inversão não-linear . . . . .	36
2.2.3 Método gradiente conjugado . . . . .	37
2.3 Tomografia sísmica . . . . .	40
2.3.1 Formulação matemática da tomografia por tempo de trânsito . . . . .	41
2.3.1.1 Discretização do problema . . . . .	42
2.4 Tomografia de refração . . . . .	43
2.4.1 Implementação . . . . .	44
2.4.2 Limitações e vantagens . . . . .	45
2.4.3 Problema de unicidade . . . . .	45
2.4.4 Regularização . . . . .	47
2.4.5 Aplicações . . . . .	49
2.4.6 Métodos de inversão não-tomográficos . . . . .	50

<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>51</b>
3.1	Parametrização do modelo	51
3.2	Cálculo do tempo de trânsito	51
3.3	Algoritmo de traçamento de raios e obtenção da matriz tomográfica	54
3.4	Dados sintéticos	56
3.4.1	Dados sintéticos com ruído branco	57
3.5	Tomografia sísmica	57
3.5.1	Regularização	58
3.5.2	Modelo inicial	58
3.5.3	Informação <i>a priori</i> e tratamento <i>a posteriori</i>	58
3.6	Aspectos computacionais	59
3.6.1	Operações com matrizes esparsas	60
<b>4</b>	<b>Resultados e Discussão</b>	<b>62</b>
4.1	Validação do algoritmo tomográfico	62
4.1.1	Modelo 1	63
4.1.1.1	Dados com ruído	66
4.1.2	Modelo 2 - Planos paralelos horizontais	67
4.1.2.1	Regularização de Tikhonov	69
4.1.2.2	Regularização de Tikhonov - Dados com ruído	71
4.2	Tomografia de refração	77
4.2.1	Modelo 1	77
4.2.1.1	Cobertura com mais tiros	79
4.2.1.2	Modelo inicial 2	80
4.2.1.3	Regularização de Tikhonov	82
4.2.2	Modelo 2	84
4.2.2.1	Regularização de Tikhonov	87
4.2.3	Modelo 3	88
4.2.3.1	Regularização de Tikhonov	89
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>92</b>
	<b>Referências</b>	<b>94</b>

# Introdução

A maior parte dos estudos em Geofísica tratam da solução de problemas inversos, uma vez que medidas diretas das propriedades de interesse são muito onerosas. Além disso, quando se fazem medidas diretas em Geofísica, em geral estas estão restritas a uma pequena área e quase sempre é impossível extrapolar os valores medidos para toda a área de estudo com a acurácia que se necessita, ainda que se use métodos geoestatísticos.

Os métodos sísmicos são os mais usados em Geofísica de Exploração, com seu uso na exploração de hidrocarbonetos tendo começado nas primeiras décadas do século XX (TELFORD et al., 1990). No final do século XX, o avanço com maior impacto na indústria petrolífera foi o uso em larga escala dos dados sísmicos 3-D. Essa tecnologia permitiu redução no número de poços perfurados, aumento no sucesso exploratório e no volume das descobertas, tudo em função do aumento na acurácia permitido pela tecnologia (BROWN, 2004).

Outros avanços com grande impacto foram o aumento nos usos do processamento em profundidade (*depth processing*) ao invés de tempo e no processamento pré-empilhamento (*prestack processing*) no lugar do pós-empilhamento (*poststack processing*) (WOODWARD et al., 2008). Neste contexto, obter modelos de velocidade em profundidade com tanta acurácia quanto possível tem ainda mais impacto sobre o resultado final do processamento sísmico.

A tomografia sísmica, a qual se trata de um tipo de problema inverso, tem como objetivo obter o modelo de velocidade em profundidade com uma acurácia elevada, sendo nos últimos anos a técnica padrão para o imageamento em profundidade (WOODWARD et al., 2008). Há vários tipos de tomografia sísmica (JONES, 2010): tempo de trânsito de reflexão; transmissão poço-à-poço; *FWI - Full Waveform Inversion* (inversão da forma completa da onda). Esta última, é atualmente o estado da arte no estudo de tomografia sísmica, sendo um dos assuntos mais estudados atualmente e com grandes desafios em sua aplicação para dados reais.

Este trabalho trata de um tipo específico de tomografia sísmica, a tomografia por tempo de trânsito de ondas refratadas. Utiliza-se como dados observados para esta técnica os tempos de primeira chegada (*first break times*) num levantamento sísmico em que os receptores e a fonte estão na superfície. O principal uso da tomografia de refração é para a obtenção de modelos para as baixas profundidades (*shallow depths*), contudo outras aplicações são possíveis.

Em geral, na indústria do petróleo as áreas de interesse estão em grandes profundidades, as quais a tomografia de refração não alcança. Contudo, os modelos das baixas profundidades tem impacto direto nos resultados obtidos para as profundidades mais altas. Por exemplo, a correção estática (no caso de processamento de dados terrestres), que depende de um modelo de velocidade em baixa profundidade (LINES; NEWRICK, 2004), é uma primeira fonte de erros e incertezas no resultado final do processamento sísmico.

Uma grande dificuldade para a tomografia sísmica é o traçamento das trajetórias dos raios, que se não for feito corretamente não levará a inversão tomográfica a bons resultados. Há técnicas que, por exemplo, não funcionam corretamente quando há grandes contrastes de velocidade, o que seria uma limitação muito grande para a tomografia de refração. Neste trabalho usou-se a técnica proposta em Podvin e Lecomte (1991), que permite tratar contrastes de velocidade grandes sem prejuízo ao traçamento dos raios.

Este trabalho está estruturado conforme descrição abaixo.

No Capítulo 1, descreve-se como ocorre a refração (termo usado na literatura para se referir as ondas criticamente refratadas ou que retornam a superfície, usado aqui da mesma forma) de ondas em meios geológicos. Tratam-se os casos mais gerais e por fim se descreve duas técnicas usadas na interpretação de raios refratados.

O Capítulo 2 trata da teoria de problemas inversos e da solução dos mesmos. Inclui-se também a descrição das técnicas de regularização de Tikhonov, importante na solução de problemas mal-postos. Em seguida, descreve-se o caso particular da inversão tomográfica. Por fim, faz-se uma revisão da tomografia de refração, objeto de estudo deste trabalho.

No Capítulo 3 explica-se a parte prática do trabalho. Inicia-se com a parametrização do modelo, para depois se descrever o calculo do tempo de trânsito, a partir do qual se obtém o traçamento dos raios e a matriz tomográfica. A obtenção dos dados sintéticos, inclusive com ruído, é exposta. Por fim, o algoritmo tomográfico é apresentado e os aspectos computacionais de todos os algoritmos implementados.

No Capítulo 4 primeiro é apresentada a validação dos algoritmos implementados, com o caso de uma tomografia com cobertura total para os dados com e sem ruído. Apresenta-se também a validação da regularização de Tikhonov. Em seguida, todos os testes para a tomografia de refração são apresentados, tais como variações da geometria de aquisição, regularizações e diferentes modelos para aplicação da técnica.

No último capítulo, apresentam-se as conclusões referentes a este trabalho, assim como as perspectivas de trabalhos futuros deixadas pelo mesmo.

# 1 Refração em sísmica

As ondas sísmicas refratadas (refração total) foram identificadas (AKI; RICHARDS, 2002), ou postuladas (SHERIFF, 1995), pela primeira vez por Mohorovičić em 1909 em um estudo sismológico. Dez anos mais tarde era depositada uma patente em que se utilizava ondas refratadas com fins de prospecção, com a técnica tendo ajudado a identificar muitos domos salinos em regiões do México e na costa estadunidense do Golfo do México durante a década de 1920-1930 (TELFORD et al., 1990).

As ondas refratadas podem receber outros nomes na literatura: ondas frontais (*head waves*, termo mais usado em Geofísica de Exploração); ondas cônicas (*conical waves*) ou ondas laterais (*lateral waves*), nomes usados em Sismologia (AKI; RICHARDS, 2002). Neste capítulo o objetivo principal é explicar como ocorre a refração total de ondas sísmicas. Nesta seção e ao longo de todo este trabalho, para simplificar a nomenclatura, ao ler-se onda sísmica deve-se subentender que se trata de onda compressional (também chamada de onda primária ou onda P). Pela mesma razão, ao ler-se onda refratada entenda-se onda sísmica criticamente refratada.

## 1.1 Eventos no sismograma

Considera-se um modelo geológico com duas camadas plano-paralelas, além de homogêneas e isotrópicas (características válidas em todos os modelos usados neste trabalho), com velocidades  $V_1$  e  $V_2$  ( $V_2 > V_1$ ). Toma-se também uma fonte sísmica localizada em  $O$  e receptores distribuídos na mesma linha horizontal, conforme mostra a Figura 1. Observa-se na mesma figura a trajetória de raios os quais indicam a direção de propagação da energia sísmica que chega aos receptores dispostos na superfície.

Pela análise da Figura 1, percebe-se que há três tipos de trajetórias para os raios no modelo considerado. A onda direta está relacionada ao raio que sai da fonte diretamente para os receptores, logo tem velocidade  $V_1$  e o cálculo do seu tempo de percurso até os receptores é:

$$t = \frac{X}{V_1}. \quad (1.1)$$

A segunda trajetória observada é a dos raios refletidos (ilustrados pelos raios tracejados na parte inferior da Figura 1) e com tempo de percurso aos receptores dado pela

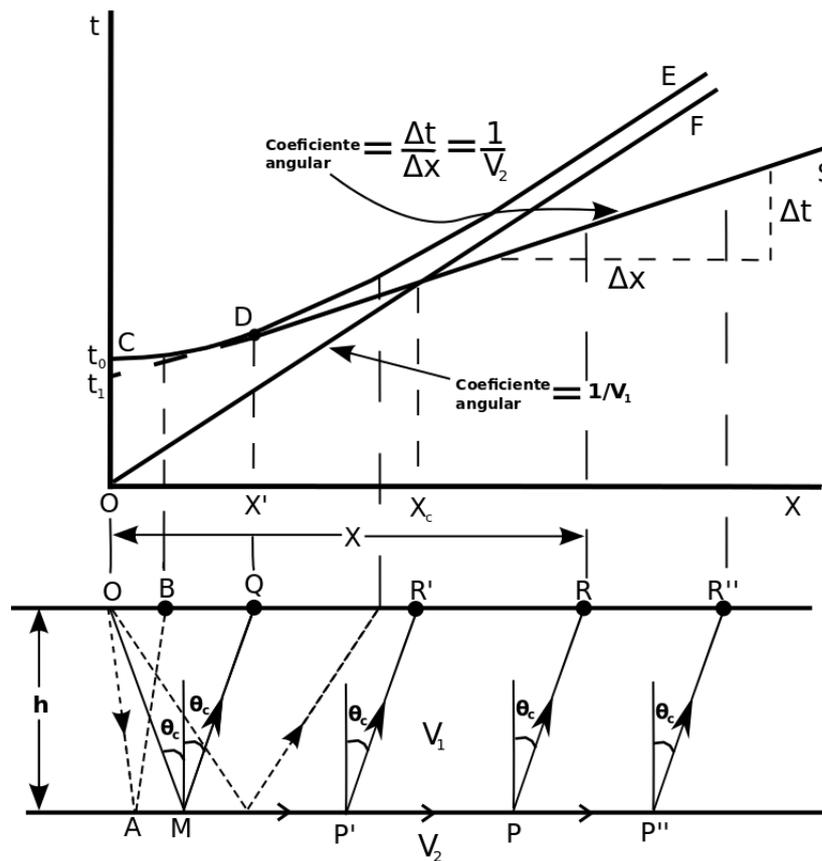


Figura 1 – Abaixo: modelo de duas camadas com velocidades  $V_1$  e  $V_2$ . Fonte sísmica localizada em  $O$  e receptores entre  $B$  e  $R''$ . Acima: gráfico com o tempo de chegada dos raios aos receptores;  $X$  é a distância entre a fonte  $O$  e algum ponto da superfície;  $X'$  é a distância mínima para a chegada da onda refratada;  $X_c$  é a distância a partir da qual a onda refratada é a primeira chegada nos detectores;  $\theta_c$  é o ângulo crítico, no qual ocorre a refração. Figura adaptada de Sheriff (1995).

expressão (KEAREY et al., 2009):

$$t = \frac{(X^2 + 4h^2)^{1/2}}{V_1}. \tag{1.2}$$

A última trajetória observada é a dos raios refratados, discutidos na próxima seção para este caso simples e também para outras situações geológicas mais complicadas.

## 1.2 Refração

Nesta seção são explicadas as principais formas em que ocorre refração de ondas sísmicas. O entendimento destas permite compreender melhor como este tipo de evento sísmico pode estar presente em sismogramas reais. O caso mais simples explicado na subseção 1.2.1 completa a explicação iniciada na seção anterior.

### 1.2.1 Refração em uma interface plana horizontal

O fenômeno de refração é a mudança na direção de propagação de uma onda ao atravessar a interface que separa dois meios com diferentes velocidades, sendo regida pela Lei de Snell inclusive para as ondas sísmicas. No caso mostrado na seção 1.1, em que  $V_2 > V_1$ , para o ângulo de incidência  $\theta_c$  (ângulo crítico) a onda é refratada à  $90^\circ$ , ou seja, a onda refratada atravessa a interface entre os dois meios (KEAREY et al., 2009). Para ângulos maiores que  $\theta_c$  ocorre reflexão interna total e para ângulos menores ocorre tanto a reflexão quanto a refração para o meio inferior, (TELFORD et al., 1990; KEAREY et al., 2009). Para um entendimento mais detalhado da equipartição da energia na interface há de se considerar as equações de Zoeppritz (TELFORD et al., 1990). Em sísmica, estas ondas criticamente refratadas são chamadas de ondas refratadas (*head waves*).

A onda sísmica refratada uma vez que se encontra no topo da camada com velocidade  $V_2$ , tem essa velocidade durante a passagem pela interface. Como não há movimento relativo entre os dois meios, em ambos (visto que a interface pertence aos dois) a onda se propaga com a mesma velocidade  $V_2$  (TELFORD et al., 1990). Com essa observação e o princípio de Huygens, é possível determinar como ocorre a propagação da onda refratada em direção a superfície, onde estão os receptores. Isso está ilustrado na Figura 2.

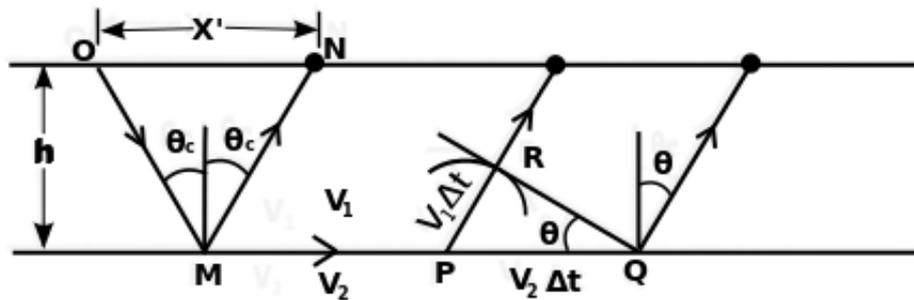


Figura 2 – Incidência da onda sísmica com o ângulo  $\theta_c$  e determinação da frente de onda que retorna a superfície (onda refratada). Pelo princípio de Huygens determina-se que o ângulo  $\theta$  é igual à  $\theta_c$ . Figura adaptada de Telford et al. (1990).

Percebe-se das Figura 1 e Figura 2 que há duas posições na superfície importantes para o estudo de ondas refratadas. A distância mínima ( $X'$ ) para a chegada da onda refratada, antes da qual a mesma não pode ser observada (TELFORD et al., 1990):

$$X' = 2h \tan \theta_c = 2h \tan \left\{ \arcsin \left( \frac{V_1}{V_2} \right) \right\} = 2h \left\{ \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^2 - 1 \right\}^{-1/2}. \quad (1.3)$$

A distância a partir da qual a onda refratada é o primeiro registro nos detectores é a outra distância importante neste estudo, sendo dada pela expressão:

$$X_c = 2h \left( \frac{V_2 + V_1}{V_2 - V_1} \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

A partir da trajetória do raio refratado, mostrado na Figura 1, pode-se obter a expressão para o tempo de trânsito para ondas refratadas. A expressão geral é obtida pela soma dos tempos de percurso dos trechos  $\overline{OM}$ ,  $\overline{MP'}$  e  $\overline{P'R'}$  (os dois últimos trechos poderiam ser qualquer outro mostrado na Figura 1 desde que atravessassem a interface e atingisse algum receptor) (KEAREY et al., 2009; TELFORD et al., 1990):

$$t = \frac{h}{V_1 \cos \theta_c} + \frac{X - 2h \tan \theta_c}{V_2} + \frac{h}{V_1 \cos \theta_c} \quad ,$$

ou

$$t = \frac{X}{V_2} + \frac{2h \cos \theta_c}{V_1}. \quad (1.5)$$

Uma vez que a lei de Snell fornece  $\sin \theta_c = V_1/V_2$ , a expressão em Equação 1.5 pode ser escrita como:

$$t = \frac{X}{V_2} + \frac{2h(V_2 - V_1)^{1/2}}{V_1 V_2}. \quad (1.6)$$

As equações apresentadas (assim como as que virão adiante) são úteis para auxiliar na identificação de raios refratados nos sismogramas. Uma outra observação importante é que no ponto D da Figura 1, a reta  $S$ , a qual indica os tempos registrados para a onda refratada é tangente a curva dos tempos da onda refletida,  $E$  (hiperbóle) (TELFORD et al., 1990).

## 1.2.2 Refração em várias interfaces planas horizontais

Na presença de mais de uma interface, a refração pode ocorrer de maneira análoga ao caso mais simples, entretanto há a possibilidade de que haja refração não apenas na primeira interface (considera-se que as velocidades das camadas mais profundas sejam maiores). A fim de mostrar a expressão mais geral para o tempo de trânsito de uma onda refratada após atravessar mais de uma camada, mostra-se primeiro como obter a expressão para o caso de três camadas (duas interfaces), conforme é feito em Sheriff (1995), Kearey et al. (2009), Telford et al. (1990).

A Figura 3 mostra a trajetória de um raio refratado na segunda interface do modelo considerado. A partir dessa trajetória ( $\overline{OM'}$ ,  $\overline{M'M''}$ ,  $\overline{M''P''}$ ,  $\overline{P''P'}$ ,  $\overline{P'R'}$ ) e com uso da relação:

$$\frac{\sin \theta_1}{V_1} = \frac{\sin \theta_{c2}}{V_2} = \frac{1}{V_3} \quad , \quad (1.7)$$

pode-se escrever a expressão para o tempo de trânsito da onda refratada segundo esta trajetória:

$$t = \frac{2h_1}{V_1 \cos \theta_1} + \frac{2h_2}{V_2 \cos \theta_{c2}} + \frac{X - 2h_1 \tan \theta_1 - 2h_2 \tan \theta_{c2}}{V_3},$$

que, depois de uma manipulação algébrica, conduz à:

$$t = \frac{X}{V_3} + \frac{2h_2 \cos \theta_{c2}}{V_2} + \frac{2h_1 \cos \theta_1}{V_1}. \quad (1.8)$$

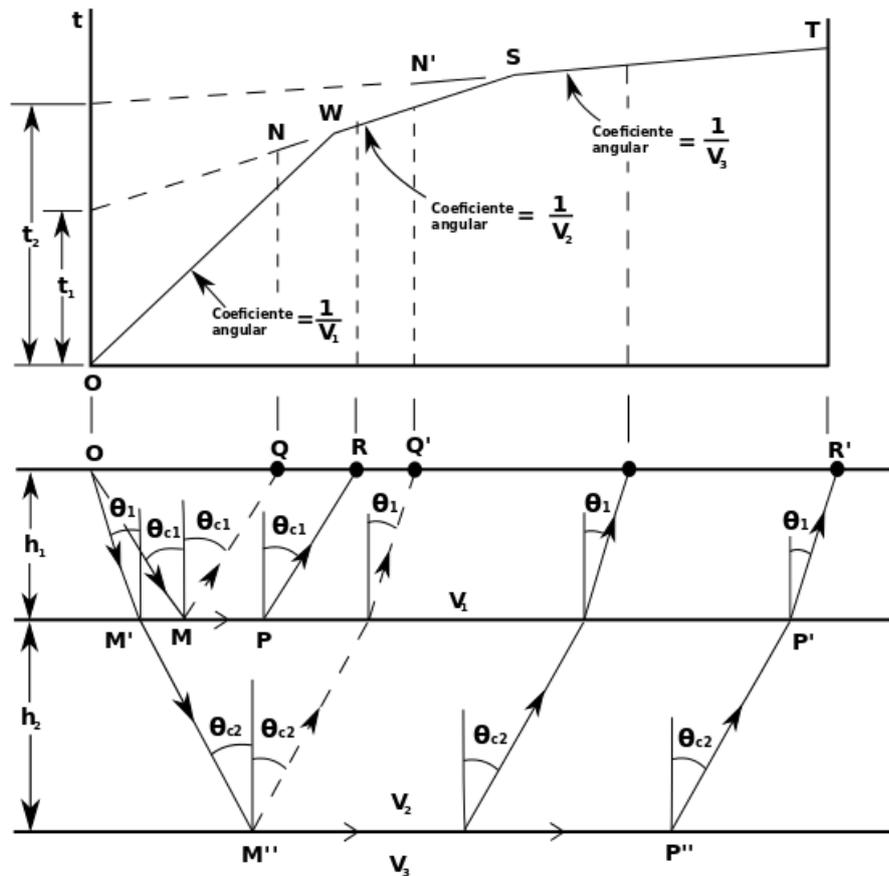


Figura 3 – Abaixo: modelo de três camadas com velocidades  $V_3 > V_2 > V_1$ . Acima: gráfico com o tempo de chegada dos raios refratados aos receptores, em que o eixo horizontal é a distância entre a fonte  $O$  e algum ponto da superfície (direção horizontal  $\overline{OR'}$ ). Figura adaptada de Sheriff (1995).

Ao comparar-se Equação 1.8 com Equação 1.5, nota-se como as equações são análogas, de forma que permitem escrever uma expressão genérica:

$$t = \frac{X}{V_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2h_i}{V_i} \cos \theta_i. \quad (1.9)$$

Nota-se da Figura 3 que analogamente ao caso de apenas uma interface, há uma distância mínima para se observar a refração para as outras camadas assim como uma distância mínima para que estas sejam as primeiras ondas a atingir a superfície. Quanto mais profunda a interface refratora, maior é o valor para ambas as distâncias.

### 1.2.3 Refração em interfaces planas inclinadas

Caso a interface que propicia ondas refratadas tenha alguma inclinação, a equação para o tempo de trânsito será diferente das apresentadas anteriormente, sendo uma das diferenças a presença de mais uma variável, o ângulo de inclinação da interface ( $\xi$ ). Por isso, precisa-se de mais de um sismograma para que ondas refratadas por camadas inclinadas sejam usadas com objetivo de obter as características da subsuperfície. Só assim é possível obter a velocidade das camadas e o ângulo de inclinação da interface (caso haja realmente).

Há mais de uma possibilidade de como obter os dados para esse tipo de problema (KEAREY et al., 2009), mas o importante é que haja aquisição dos dados em ambos os sentidos da inclinação. Isso pode ocorrer com a geometria de aquisição sísmica sendo *split-spread* ou com a aquisição dos dados feita duas vezes, com a fonte ao fim do lançamento de receptores e no começo do lançamento.

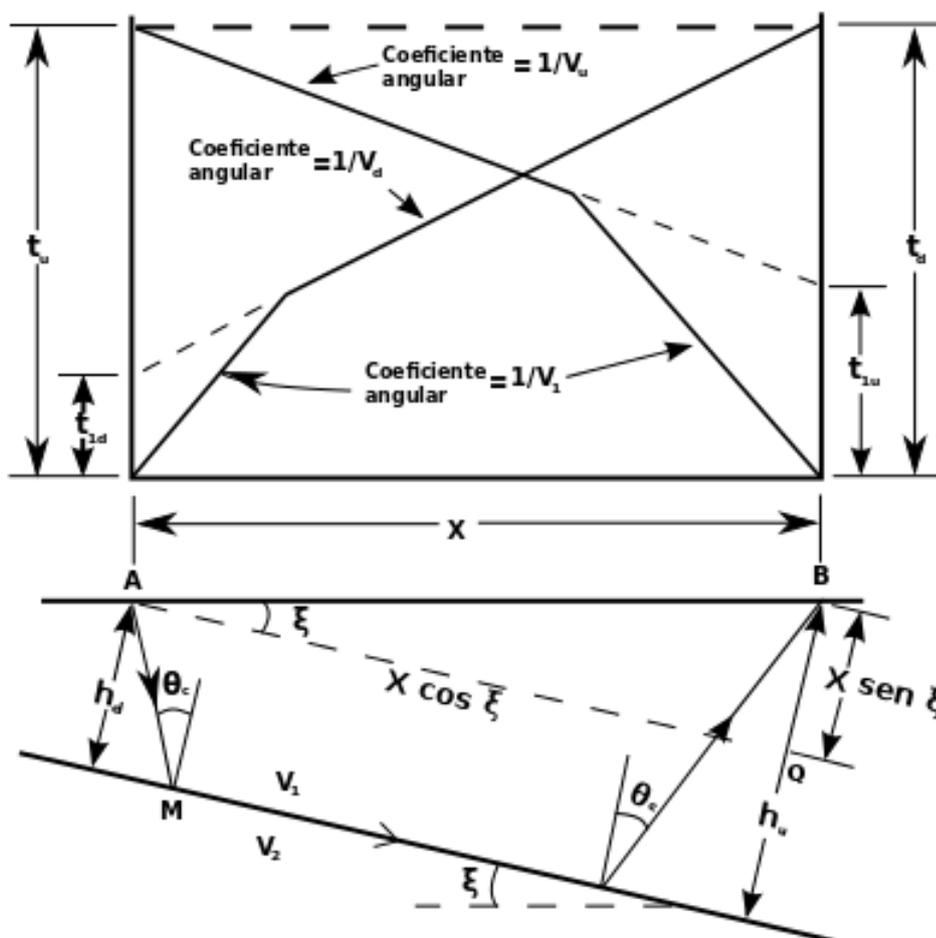


Figura 4 – Abaixo: modelo de duas camadas com velocidades  $V_2 > V_1$  e interface com ângulo de inclinação  $\xi$ . Acima: gráfico com o tempo de chegada dos raios refratados aos receptores, com a fonte em A, receptor em B ( $t_d$ ) e fonte em B, receptor em A ( $t_u$ );  $X$  é a distância entre a fonte e o receptor. Figura adaptada de Telford et al. (1990).

A equação do tempo de trânsito pode ser obtida como nos casos apresentados

antes (SHERIFF, 1995), considerando as variáveis mostradas na Figura 4:

$$t = \frac{X \cos \xi}{V_2} + \frac{h_d + h_u}{V_1} \cos \theta_c. \quad (1.10)$$

Ao se observar a Figura 4 percebe-se que de acordo com a posição escolhida para a fonte ( $A$  ou  $B$ ) obtem-se curvas de tempo de trânsito diferentes. Isso fica mais claro ao notar-se que para cada posição considerada da fonte há tempos e posições diferentes para a chegada da primeira frente de onda refratada à superfície, uma vez que há duas distâncias diferentes da superfície à interface,  $h_d$  e  $h_u$ . Considerando que

$$h_u = h_d + X \sin \xi \quad , \quad (1.11)$$

e usando a Equação 1.10, obtem-se as relações para os tempos de trânsito na trajetória em que o raio desce ao longo da interface ( $t_d$ ) e na trajetória em que o raio sobe ao longo da interface ( $t_u$ ),

$$t_d = \frac{X}{V_d} + t_{1d} \quad , \text{ com } V_d = \frac{V_1}{\sin(\theta_c + \xi)} \quad \text{e} \quad t_{1d} = \frac{2h_d}{V_1} \cos \theta_c \quad , \quad (1.12)$$

e

$$t_u = \frac{X}{V_u} + t_{1u} \quad , \text{ com } V_u = \frac{V_1}{\sin(\theta_c - \xi)} \quad \text{e} \quad t_{1u} = \frac{2h_u}{V_1} \cos \theta_c. \quad (1.13)$$

### 1.3 Interpretação geológica com ondas refratadas

Como mostrado nas seções anteriores, a onda direta e a onda refratada são os primeiros eventos registrados nos sismogramas. Essa característica é vantajosa para o uso da refração na interpretação de dados, uma vez que isso aumenta a acurácia na determinação do tempo de trânsito desse evento (TELFORD et al., 1990).

A principal aplicação da interpretação de ondas refratadas é na determinação do modelo geológico (espessura e velocidade) em profundidade para camadas rasas (*near surface velocity-depth model*) (YILMAZ, 2001a). Este modelo é obrigatório no processamento de dados sísmicos terrestres para aplicação da correção estática (LINES; NEWRICK, 2004), onde neste caso o modelo para profundidade rasa corresponde à camada de intemperismo (*weathering layer* que pode ter de pouco metros à dezenas de metros) (YILMAZ, 2001a). Entretanto, dados de refração também podem ser úteis na obtenção de modelos geológicos a partir de dados marinhos, como mostrado em Mitchell e Bolander (1986) onde se obtem modelos geológicos estruturais com uso de ondas refratadas em regiões deste tipo.

A técnica mais direta para interpretação é o uso das equações apresentadas na seção 1.2, mas ao se fazer isso há algumas limitações, como assumir que as camadas são planas (TELFORD et al., 1990). Por isso, diversas técnicas de interpretação foram desenvolvidas e aqui serão apresentadas duas destas.

### 1.3.1 Método mais-menos

Este método, originalmente chamado de *plus-minus method*, pode ser aplicado à interfaces refratoras não horizontais (ângulo de até  $10^\circ$ ) e irregulares (KEAREY et al., 2009). A partir da Figura 5 escrevem-se os tempos mais ( $t_+$ ) e menos ( $t_-$ ) usados na interpretação.

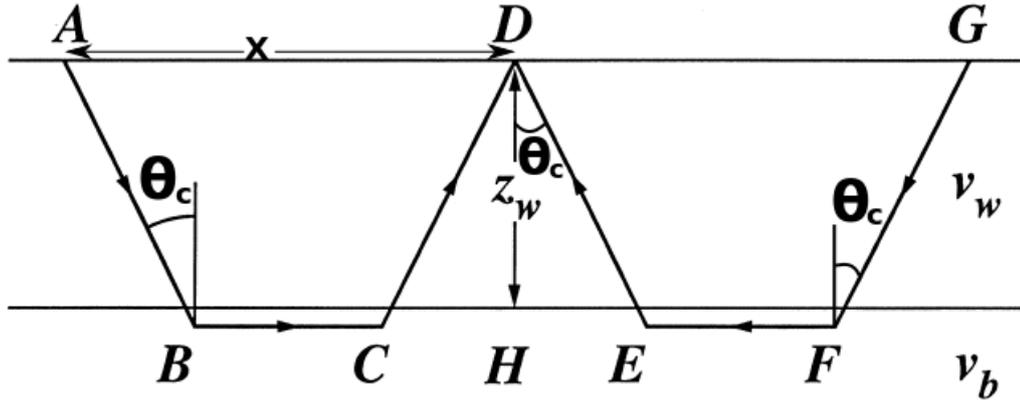


Figura 5 – Figura adaptada de Yilmaz (2001a).

Seguindo a dedução feita por Yilmaz (2001a), a estimativa para  $t_+$  é:

$$\begin{aligned}
 t_+ &= t_{ABCD} + t_{DEFG} - t_{ABFG} = 2 \left( \frac{\overline{CD}}{v_w} - \frac{\overline{CH}}{v_b} \right), \text{ onde} \\
 t_+ &= 2 \left( \frac{z_w}{v_w \cos \theta} - \frac{z_w \tan \theta}{v_b} \right) \text{ ou} \\
 t_+ &= \frac{2z_w \sqrt{v_b^2 - v_w^2}}{v_w v_b}. \tag{1.14}
 \end{aligned}$$

Para  $t_-$ , tem-se que:

$$\begin{aligned}
 t_- &= t_{ABCD} - t_{DEFG} + t_{ABFG} = \frac{2\overline{CD}}{v_w} + \frac{2\overline{BC}}{v_b} + \frac{2\overline{CE}}{v_b}, \text{ onde} \\
 t_- &= \frac{2z_w}{v_w \cos \theta} + \frac{2\overline{BC}}{v_b} + \frac{2z_w \tan \theta}{v_b} \text{ ou} \\
 t_- &= \frac{2z_w}{v_w \cos \theta} - \frac{2z_w \tan \theta}{v_b} + \frac{2x}{v_b}, \text{ com } x = \overline{AD}. \text{ Logo,} \tag{1.15}
 \end{aligned}$$

$$t_- = t_+ + \frac{2x}{v_b}. \tag{1.16}$$

Da Equação 1.16, tem-se que uma vez obtidos  $t_+$  e  $t_-$  (após tomados os valores dos tempos de primeira chegada na geometria de aquisição apropriada para o método, para diferentes valores de  $x$ ): o valor de  $v_b$  será o inverso do coeficiente angular da reta

obtida; com  $t_+$ ,  $v_b$  e  $v_w$  (obtido da onda direta por exemplo) calcula-se a profundidade  $z_w$  da interface refratora. Uma observação importante é, supondo que a camada inferior de velocidade  $v_w$  se estenda lateralmente de forma homogênea, em todos os pontos que se identifica refração pode-se calcular  $t_+$  e a partir deste se obter a profundidade da interface refratora (KEAREY et al., 2009).

### 1.3.2 Método recíproco generalizado

O método recíproco generalizado (GRM - *generalized reciprocal method*) foi desenvolvido por Palmer (1981), sendo uma generalização do método mais-menos (YILMAZ, 2001a). O GRM precisa de uma maior densidade na aquisição dos dados, porém permite obter valores mais acurados de velocidade, profundidade de interfaces refratorias (KEAREY et al., 2009) e resultados melhores quando camadas ocultas estão presentes (PALMER, 1981).

No GRM a geometria é similar ao do método anterior, porém agora há duas posições para os receptores, conforme ilustrado na Figura 6. As equações usadas consideram a separação  $\overline{XY}$  e determinar o valor ótimo desta distância é uma das dificuldades do método, assim como uma etapa importante (PALMER, 1981).

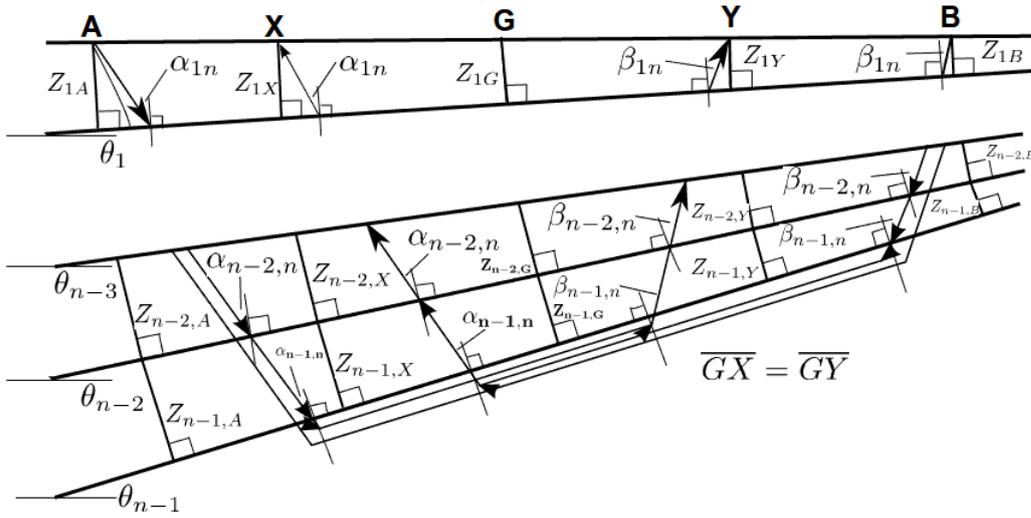


Figura 6 –  $\theta_n$  é o ângulo de mergulho da  $n$ -ésima interface;  $\alpha_n$  é o ângulo formado pelo raio com a  $n$ -ésima interface, à direita do ponto  $G$ ;  $\alpha_n$  é o ângulo formado pelo raio com a  $n$ -ésima interface, à esquerda do ponto  $G$ ;  $Z_n P$  é a menor distância entre a interface  $n$  e  $n-1$ , considerando o ponto  $P$  como referência para determinar o primeiro valor  $Z_1 P$ , o qual determina o ponto de origem para a distância  $Z_n P$  seguinte. Figura adaptada de Palmer (1981).

Seguindo Palmer (1981), com todas as variáveis usadas indicadas na Figura 6 :

$$t_- = (t_{AY} - t_{BX} + t_{AB})/2 \quad , \quad e \quad (1.17)$$

$$t_+ = [t_{AY} + t_{BX} - (t_{AB} + \overline{XY}/V'_n)]/2. \quad (1.18)$$

Analogamente ao método mais-menos:

$$\frac{d}{dx}t_- = 1/V'_n \quad , \quad (1.19)$$

e

$$V_n \simeq V'_n \cos \theta_{n-1} \quad , \quad (1.20)$$

onde  $V'_n$  é a velocidade aparente,  $\theta_{n-1}$  é o ângulo de mergulho da interface e  $V_n$  é a velocidade da camada.

Como considera-se  $\theta_{n-1}$  pequeno, aceita-se  $V_n \simeq V'_n$  e a Equação 1.18 pode se reescrita como:

$$t_+ = \sum_{j=1}^{n-1} Z_{jG}/V_{jn} \quad , \quad (1.21)$$

onde  $V_{jn}$  é o fator de conversão em profundidade.

Segundo Palmer (1981), como o GRM usa os dados direto e reverso (ou seja, considera o tempo marcado nos dois receptores do arranjo para obter os resultados) o fator de conversão  $V_{jn}$  pode ser aproximado por:

$$V_{jn} \simeq V'_n V'_j / (V_n'^2 - V_j'^2)^{1/2}. \quad (1.22)$$

Esta aproximação funciona bem para ângulos de inclinação de até 20° para a interface refratora (PALMER, 1981), valor bem superior ao do método mais-menos. Isso possibilita a obtenção de resultados mais acurados.

O valor ótimo de  $\overline{XY}$  é determinado pela verificação de qual valor fornece o melhor ajuste linear para a função  $t_-$ , obtida dos dados (KEAREY et al., 2009). Entretanto, também é possível fazer o cálculo analítico deste valor ótimo de  $\overline{XY}$  (PALMER, 1981). O resultado analítico pode ser comparado com o valor obtido pelo ajuste linear a fim de verificar a consistência deste último. Incosistência nos valores comparados indica que há camadas não detectáveis (camada de baixa velocidade abaixo de camada com velocidade mais alta ou camada cuja refração não atinge os receptores como primeira chegada, devido, por exemplo, a espessura reduzida desta).

## 2 Teoria da inversão e tomografia

Em todas as áreas do saber usam-se dados experimentais para chegar-se a conclusões sobre o objeto estudado. A teoria da Inversão sistematiza as técnicas matemáticas de inversão, definindo rigorosamente as técnicas disponíveis e também disponibilizando novas (MENKE, 1989). Qualquer problema em que se deseja inferir propriedades do meio a partir de registros externos ao mesmo é chamado problema inverso (*inverse problem*).

Como ocorre com outras teorias científicas, há mais de uma formulação matemática possível para a teoria da inversão. Por exemplo, Tarantola e Valette (1982) desenvolveu uma abordagem estatística para tratar problemas inversos. Esta formulação fornece resultados equivalentes aos obtidos pela formulação tradicional (usada neste trabalho), em que cada variável é tratada de forma única ao invés de ser considerada uma distribuição estatística. A formulação tradicional é o mesmo que considerar uma distribuição gaussiana para as variáveis na formulação probabilística de Tarantola.

Haja visto que a tomografia sísmica é um tipo particular de problema inverso, primeiro discute-se brevemente a teoria da inversão. Em seguida, introduz-se o problema da tomografia sísmica para a partir deste tratar as particularidades do interesse deste trabalho, a tomografia sísmica de refração.

### 2.1 Problemas Inversos

Uma definição abrangente para problema inverso é considerar como qualquer problema em que a partir de dados observados deseja-se obter o modelo físico (conjunto de parâmetros) correspondente as observações, procedimento feito, por exemplo, na interpretação geológica de dados sísmicos. Rigorosamente, porém, pode-se definir como um conjunto de técnicas matemáticas para extrair de dados observados os parâmetros físicos correspondentes, considerando um modelo físico-matemático que explique a relação entre ambos (MENKE, 1989). Seguindo a abordagem matemática da teoria da inversão (ASTER et al., 2005; MENKE, 1989; ZHDANOV, 2002), define-se:  $\mathbf{d}$  como o vetor<sup>1</sup> dados, em que cada elemento corresponde à uma observação;  $\mathbf{m}$  como o vetor parâmetros do modelo (ou apenas modelo), onde cada elemento corresponde ao valor de um parâmetro

<sup>1</sup> Considerados aqui como vetores coluna, como é feito em todas as referências consultadas. Entretanto, nada impede que se trabalhe com vetores linha, apenas haveriam diferenças nas deduções matemáticas feitas.

do modelo;  $G$ , a matriz que relaciona os parâmetros ( $\mathbf{m}$ ) aos dados ( $\mathbf{d}$ ).

$$\mathbf{d} = G\mathbf{m}. \quad (2.1)$$

O problema inverso consiste em: tendo-se  $\mathbf{d}$  e  $G$ , obter  $\mathbf{m}$ . O problema direto é a partir de  $\mathbf{m}$  e  $G$ , obter  $\mathbf{d}$ .

### 2.1.1 Problema mal posto

A maioria, senão todos, os problemas inversos em Geofísica são mal postos (*ill-posed*). O critério usado para classificar um problema inverso como mal-posto foi estabelecido por Hadamard (apud ZHDANOV, 2002). Por este critério, um problema inverso é mal-posto caso a solução não atenda ao menos uma das seguintes condições: existência, unicidade e estabilidade. Para o problema ser bem-posto (*well-posed*) as três condições devem ser obedecidas.

#### 2.1.1.1 Existência

Ao considerar a Equação 2.1, toda a informação que se tem sobre o modelo físico que gera as observações ( $\mathbf{d}$ ) está contida na matriz  $G$ . Entretanto, o dado medido sempre contém erros (ZHDANOV, 2002), tanto associados à problemas ou erros na medição quanto à presença inerente de ruído em qualquer sistema físico. Por esta razão nem sempre é possível encontrar o vetor  $\mathbf{m}$  que descreve  $\mathbf{d}$ , já que estes erros não são considerados no modelo usado. Há também a possibilidade do modelo usado para descrever os dados não está correto ou completo, o que também torna impossível obter uma solução para o problema (ASTER et al., 2005).

#### 2.1.1.2 Unicidade

É possível que haja mais de um vetor  $\mathbf{m}$  que satisfaça a Equação 2.1. Uma forma fácil de entender isso é considerando a definição de espaço vetorial nulo de uma matriz (ASTER et al., 2005). Para a matriz  $G$ , o espaço nulo é todo vetor (não nulo)  $\mathbf{m}_0$  que satisfaz:

$$G\mathbf{m}_0 = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Considera-se uma solução  $\mathbf{m}_s$  para o problema inverso modelado por  $G$ . Da definição de espaço nulo, tem-se que uma combinação linear de  $\mathbf{m}_s$  e  $\mathbf{m}_0$  também é solução do problema inverso. Portanto, caso o espaço nulo de  $G$  seja não-vazio o problema inverso tem mais de uma solução possível.

### 2.1.1.3 Estabilidade

Uma solução é estável se pequenas mudanças nos valores de  $\mathbf{d}$  levam à pequenas mudanças na solução, do contrário tem-se uma solução instável. Uma definição matematicamente rigorosa para estabilidade é que o operador inverso  $G^{-1}$ , que dá a solução do problema inverso, seja contínuo em todo o espaço de soluções (ZHDANOV, 2002).

## 2.1.2 Solução de problemas mal-postos

Ao se tentar solucionar um problema inverso qualquer, devido as limitações impostas pelos dados observados procura-se na verdade uma quase-solução (ZHDANOV, 2002), que é a solução  $\mathbf{m}_s$  que satisfaz a condição:

$$\|\mathbf{d} - G\mathbf{m}_s\| < \delta \quad , \quad (2.3)$$

onde:  $G\mathbf{m}_s$  é o dado previsto, com o resultado da inversão;  $\|\mathbf{d} - G\mathbf{m}_s\|$  é a norma do erro entre o dado observado e o dado previsto; e  $\delta$  é o valor escolhido como tolerância para a norma do erro entre o dado observado e o dado previsto.

A norma mais comum de ser considerada em problemas de inversão é a  $L_2$  (única usada neste trabalho), mas outras podem ser usadas de acordo com o objetivo ou o tipo de problema a ser resolvido. A escolha do tipo de norma usada tem relação direta com o tipo de distribuição estatística que se supõe que os dados seguem (MENKE, 1989), a norma  $L_2$  implica em considerar uma distribuição gaussiana para os dados observados.

Segundo Zhdanov (2002), antes do estabelecimento das técnicas de regularização de Tikhonov acreditava-se que problemas mal-postos (ao menos do ponto de vista matemático) não possuíam significado matemático ou físico. Entretanto, com o estabelecimento das técnicas de regularização de Tikhonov iniciou-se o desenvolvimento das técnicas de solução de problemas mal-postos (ZHDANOV, 2002). Na prática tornar um problema mal-posto em bem-posto (ou seja, torná-lo solucionável) é feito considerando-se que a solução pertence à um conjunto menor de possíveis soluções, ou seja, limita-se as possíveis soluções do problema.

A importância do trabalho de Tikhonov é não apenas pelo estabelecimento das técnicas de regularização (discutidas a frente), mas pela demonstração (matemática) de que é possível solucionar problemas mal-postos (ZHDANOV, 2002). Para que isso seja possível, basta que se saiba *a priori* que há uma solução contida num subconjunto de todas as possíveis soluções, com o operador  $G^{-1}$  contínuo neste conjunto (ZHDANOV, 2002). Ao selecionar esse conjunto, o problema mal-posto torna-se condicionalmente bem-posto.

### 2.1.3 Regularização

O objetivo das técnicas de regularização sempre é tornar o operador, o qual inverte o dado, em contínuo; isso equivale à tornar as soluções estáveis e o problema em bem-posto. Ao regularizar a inversão, o problema a ser resolvido deixa de ser exatamente o problema original e torna-se um problema que se aproxima do original. O fator (ou parâmetro) de regularização ( $\lambda$ ) determina o peso dado a regularização no processo de inversão e conforme  $\lambda \rightarrow 0$  a solução regularizada ( $\mathbf{m}_\lambda$ ) deve tender assintoticamente para a solução correta  $\mathbf{m}_c$  (ZHDANOV, 2002), assim como o operador regularizado deve tender ao operador  $G^{-1}$ .

A regularização também pode ser entendida como introdução de informação à priori nos dados sendo invertidos, uma vez que este procedimento limita as soluções possíveis do problema à um subconjunto de todas as soluções possíveis inicialmente. Apesar de amplamente usada, não há uma técnica específica para determinar o valor do parâmetro de regularização, o qual em geral é escolhido de maneira subjetiva.

#### 2.1.3.1 Regularizadores de Tikhonov

A resolução do problema inverso sem regularização é a minimização de  $\|\mathbf{d} - G\mathbf{m}_s\|_2$ , chamada de função objetivo:

$$\min \|\mathbf{d} - G\mathbf{m}_s\|_2. \quad (2.4)$$

A regularização de Tikhonov de ordem zero é a minimização de  $\|\mathbf{m}_s\|_2$  (o índice 2 indica que se trata de norma  $L_2$ ), de forma que  $\|\mathbf{d} - G\mathbf{m}_s\|_2 < \delta$  (pode-se trocar a expressão a ser minimizada pela restrição e vice-versa, sem prejuízo ao resultados final) (ASTER et al., 2005). Para obter uma expressão geral a ser minimizada, basta aplicar multiplicadores de Lagrange a condição dada, cujo resultado é:

$$\min \|\mathbf{d} - G\mathbf{m}_s\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{m}_s\|_2^2. \quad (2.5)$$

Ao derivar a Equação 2.5 em relação à  $\mathbf{m}_s$  e igualar o resultado à zero (ou seja, resolver a minimização da função acima), obtem-se a equação normal para a regularização de Tikhonov de ordem zero:

$$(G^T G + \lambda^2 I)\mathbf{m}_s = G^T d, \quad (2.6)$$

onde  $I$  é a matriz identidade e  $T$  indica matriz transposta.

A regularização de Tikhonov de ordem zero é equivalente ao método dos mínimos quadrados amortecidos. Conforme explicado em Aster et al. (2005) a escolha da regularização de ordem zero minimiza a norma dos parâmetros invertidos e isso pode ser feito como tentativa de que apenas os parâmetros relevantes (logo, tão distante de zero quanto possível) sejam obtidos como resultado.

As regularizações de Tikhonov de ordem superior seguem a mesma lógica da regularização de ordem zero, apenas substituindo a minimização da norma de  $\mathbf{m}_s$  pela minimização de uma função de  $\mathbf{m}_s$ . A regularização de ordem 1 usa a derivada primeira de  $\mathbf{m}_s$  e a regularização de ordem 2, a derivada segunda. Assim, de maneira mais genérica tem-se:

$$\min \|\mathbf{d} - G\mathbf{m}_s\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{L}\mathbf{m}_s\|_2^2, \quad (2.7)$$

onde  $L$  é matriz do operador considerado (derivada primeira ou segunda de  $m_s$ ).

Analogamente ao caso de ordem zero, obtém-se a equação normal:

$$(G^T G + \lambda^2 L^T L)\mathbf{m}_s = G^T d. \quad (2.8)$$

Caso considere-se a matriz  $L$  como a matriz identidade recai-se na regularização de ordem zero. Uma forma útil de análise para se chegar à equação normal é considerar a minimização dessa forma (ASTER et al., 2005):

$$\min \left\| \begin{bmatrix} G \\ \lambda L \end{bmatrix} \mathbf{m}_s - \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2. \quad (2.9)$$

Essa forma de visualizar o problema mostra que a regularização pode ser vista como a troca da matriz  $G$  pela matriz aumentada  $\begin{bmatrix} G \\ \lambda L \end{bmatrix}$ . Tal prescrição facilita a implementação computacional da regularização.

### 2.1.3.2 Regularizador de Berryman

Esta regularização foi definida especificamente para o caso da tomografia quando cada elemento da matriz  $G$  representa o comprimento de um raio numa célula do modelo a ser invertido (sendo cada linha da matriz correspondente a um raio traçado)<sup>2</sup>. A proposta desta regularização é considerar razões físicas na escolha das matrizes de regularização (BERRYMAN, 1991).

As matrizes de regularização de Berryman são:

$$C_{jj} = \sum_{i=1}^N G_{ij}, \quad (2.10)$$

e

$$D_{ii} = \sum_{j=1}^M G_{ij}, \quad (2.11)$$

onde  $i$  é o índice da linha da matriz e  $j$  o índice da coluna;  $N$  é o número de linhas (raios) da matriz  $G$ ;  $M$  é o número de colunas da matriz  $G$  (o qual é idêntico ao número de parâmetros considerados).

<sup>2</sup> Nas seções seguintes ficarão claras todas as definições para o caso da tomografia

Cada elemento da matriz diagonal  $C$  é o comprimento total de raios que passa em uma célula do modelo e na matriz diagonal  $D$  cada elemento é o comprimento total de um raio. Agora, define-se:

$$W = D^{-1} \quad , \quad (2.12)$$

e

$$R^T R = C \quad (2.13)$$

A regularização proposta tem como equação normal:

$$(G^T W G \mathbf{m}_s + \lambda^2 R^T R) \mathbf{m}_s = G^T W^{-1} \mathbf{d}. \quad (2.14)$$

Esta última expressão é equivalente a minimizar a seguinte função objetivo:

$$\min \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{W} G \\ \lambda R \end{bmatrix} \mathbf{m}_s - \begin{bmatrix} \sqrt{W} \mathbf{d} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2. \quad (2.15)$$

## 2.2 Solução de problemas inversos

Uma vez entendida a formulação dos problemas inversos e a ideia geral de como resolvê-los, pode-se explicar o procedimento prático de resolução. A diferença principal no estabelecimento dos métodos de solução é entre o problema linear e não-linear. A fim de tornar claro cada um dos casos, reconsidera-se a relação entre os dados e o modelo, representado inicialmente na Equação 2.1, de um ponto de vista de funções.

$$\mathbf{d} = G(\mathbf{m}) \quad , \quad (2.16)$$

onde  $G$  agora é uma função que relaciona o modelo ( $\mathbf{m}$ ) ao dado ( $\mathbf{d}$ ).

### 2.2.1 Inversão linear

No caso em que a função  $G$  (Equação 2.16) é linear ( $G(\alpha m_1 + \beta m_2) = \alpha G(m_1) + \beta G(m_2)$ ), tem-se um problema inverso linear. Neste caso, o problema sempre pode ser colocado na forma da Equação 2.1 (ASTER et al., 2005). Assim, a resolução do problema inverso consistiria apenas na determinação da matriz inversa,  $G^{-1}$ . Contudo, na maioria dos casos isso não é possível por ao menos uma das seguintes razões (BERRYMAN, 1991):  $G$  não é uma matriz quadrada; o posto da matriz  $G$  não é completo (número de incógnitas maior que o número de equações);  $G$  não é bem-condicionada (determinante com valor muito próximo a zero). Além disso, caso seja possível calcular a inversa de  $G$ , há um grande custo computacional, fator que torna este procedimento completamente inviável em aplicações reais da indústria.

O método dos mínimos quadrados para resolução de problemas inversos lineares busca resolver uma das limitações citadas, a matriz não ser quadrada. Basta minimizar a função objetivo em relação aos parâmetros do modelo (MENKE, 1989):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} (\mathbf{d} - G\mathbf{m})^T (\mathbf{d} - G\mathbf{m}) = 0. \quad (2.17)$$

O que leva a solução,  $\mathbf{m}_s$ :

$$\mathbf{m}_s = (G^T G)^{-1} G^T \mathbf{d}. \quad (2.18)$$

## 2.2.2 Inversão não-linear

Caso  $G$  (Equação 2.16) seja não-linear (por exemplo, ser uma função de  $\mathbf{m}$ ), tem-se um problema não-linear. Para solucionar este tipo de problema, a forma mais fácil é tentar linearizá-lo. Para isto basta expandir a Equação 2.16 em série de Taylor até o termo de primeira ordem, em torno de um ponto  $m_0$  (modelo inicial):

$$G(\mathbf{m}) = G(\mathbf{m}_0) + \left. \frac{\partial G(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_0). \quad (2.19)$$

Das expressões:

$$\Delta \mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_0, \quad (2.20)$$

$$\left. \frac{\partial G(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} = G_k, \quad (2.21)$$

$$(2.22)$$

onde Equação 2.21 é chamada de derivada de Fréchet (ZHDANOV, 2002), e da Equação 2.16 de pode-se reescrever Equação 2.19 como:

$$G_k \Delta \mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{d} - G(\mathbf{m}_0) = \Delta \mathbf{d}. \quad (2.23)$$

Assim, de Equação 2.23 pode-se calcular  $\Delta \mathbf{m}_{k+1}$ , logo:  $\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_0 + \Delta \mathbf{m}_{k+1}$ . A resolução do problema não-linear, pode então ser encontrada de maneira iterativa. O algoritmo consiste em:

1. Tem-se inicialmente  $\mathbf{d}^{\text{obs}}$  (dado observado) e um modelo inicial  $\mathbf{m}_0$ ,  $k = 0$ .
2. Calcula-se a derivada de Fréchet para  $\mathbf{m}_k$  e o dado calculado,  $\mathbf{d}_k^{\text{calc}}$ , para o modelo  $\mathbf{m}_0$ .

3. Verifica-se o erro entre o dado observado e o calculado:  $\Delta d = \mathbf{d}^{\text{obs}} - \mathbf{d}_k^{\text{calc}}$ . Caso esta diferença seja menor que um valor estipulado, a iteração é interrompida e a solução é o modelo  $\mathbf{m}_k$ .
4. Pela solução da equação Equação 2.23 determina-se  $\Delta \mathbf{m}_{k+1}$ . Deste resultado, obtém-se um novo modelo:  $\mathbf{m}_{k+1} = -\mathbf{m}_k + \Delta \mathbf{m}_{k+1}$
5. Retorna-se ao passo 2.

Linearizar um problema não-linear tem consequências diretas sobre a unicidade e convergência da solução. A função erro para um problema linear sempre é um parabolóide (MENKE, 1989), o que limita o tipo de função erro que se tem. Para o problema não-linear, pode-se ter qualquer superfície para a função erro o que aumenta a dificuldade em determinar-se o mínimo global desta função.

Em Menke (1989) esta discussão fica esclarecida e usou-se esta referência para a discussão que segue. Ao linearizar um problema próximo à um ponto específico ( $\mathbf{m}_0$ ), a resolução que vier a ser encontrada fica restrita às vizinhanças deste ponto, uma vez que a expansão feita da função original (Equação 2.19) aproximou a função erro do problema para um parabolóide tangente a função erro original no ponto  $\mathbf{m}_0$ . Isso explica também a importância na escolha do modelo inicial  $\mathbf{m}_0$  e as possíveis consequências: solução encontrada ser um mínimo local e não global; não encontrar-se uma solução porque  $\mathbf{m}_0$  está muito distante de um ponto mínimo; solução ser um máximo ao invés de um mínimo.

Uma opção para verificar qual o melhor modelo inicial de acordo com Menke (1989) seria testar diferentes modelos, mas ainda assim não se teria garantia da obtenção de um mínimo global (caso exista) como solução. O que se pode fazer é usar todas as informações *a priori* disponíveis para limitar ao máximo as possíveis soluções e logo os modelos iniciais possíveis de serem usados. Além disso, essas informações *a priori* podem ser incorporadas tanto como limitantes nos valores possíveis dos parâmetros invertidos como regularizações que determinam alguma característica mais geral dos parâmetros (como a suavidade imposta pelo regularizador de Tikhonov de ordem 1).

### 2.2.3 Método gradiente conjugado

Como explicado na subseção 2.2.1 para realizar uma inversão linear há alguns problemas relacionados à matriz a ser invertida, além do problema computacional ao se trabalhar com problemas aplicados (os quais envolvem matrizes muito grandes, com milhares de elementos em casos mais simples). Dentro desta perspectiva, métodos iterativos de resolução são mais eficientes, classe na qual se inclui o Método Gradiente Conjugado (MGC). Em verdade o MGC inclui-se na subclasse de métodos de projeção (MARTINS, 1992).

Qualquer técnica iterativa busca resolver o problema, Equação 2.1, através de sucessivas iterações que finalizam quando a norma do resíduo:  $r_n = G\mathbf{m}_s^n - \mathbf{d}$  é menor que um valor mínimo ( $\delta$ ) escolhido ou quando atinge-se um número máximo de iterações (ZHDANOV, 2002). A variável  $\mathbf{m}_s^n$  é a solução na n-ésima iteração.

Nas deduções feitas a seguir para o Método do Gradiente Conjugado, usou-se como principais referências Scales et al. (2001) e Aster et al. (2005). O MGC busca resolver o problema corrigindo o vetor solução em cada passo da iteração na direção conjugada em relação a iteração anterior, em que dois vetores  $p_i$  e  $p_j$  tem direções conjugadas se o produto escalar é nulo, conforme Equação 2.24:

$$\langle \mathbf{p}_i, G\mathbf{p}_j \rangle = \mathbf{p}_i^T G\mathbf{p}_j = 0. \quad (2.24)$$

Vetores que obedecem essa propriedade formam um conjunto mutuamente conjugado em relação à  $G$ .

O algoritmo para solucionar o sistema da Equação 2.1 pode ser reformulado como o problema de minimizar a função  $\phi(x)$  em relação à  $\mathbf{x}$ :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T G\mathbf{x} - \mathbf{d}^T \mathbf{x}. \quad (2.25)$$

Pode-se reescrever  $\mathbf{x}$  na base dos vetores mutualmente perpendiculares à  $G$ ,  $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i p_i$ , ficando a Equação 2.25 como:

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i^2 \mathbf{p}_i^T G\mathbf{p}_i - 2\alpha_i \mathbf{d}^T \mathbf{p}_i). \quad (2.26)$$

Derivando-se Equação 2.26 em relação à  $\alpha$  obtem-se a condição para minimizar a função  $\phi(\mathbf{x})$ :  $\alpha_i = \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{p}_i}{\mathbf{p}_i^T G\mathbf{p}_i}$ .

Em cada iteração tem-se:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k. \quad (2.27)$$

Para construir a base de vetores  $\mathbf{p}_i$  deve-se considerar os vetores resíduos, definido como:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{d} - G\mathbf{x}_{k+1} \quad , \\ \mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{r}_k - \alpha_k G\mathbf{p}_k. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Além disso, considerando a propriedade de mútua ortogonalidade dos vetores  $p_i$  e também a ortogonalidade entre os vetores resíduo ( $\mathbf{r}_k$  de diferentes iterações entre si e com os vetores  $\mathbf{p}_i$ ) chega-se a expressão para  $p_{k+1}$ :

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_{k+1}\mathbf{p}_k \quad , \quad (2.29)$$

$$\text{com } \beta_{k+1} = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}$$

Assim, o algoritmo para o MGC fica:

1. Considera-se:  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{d} - G\mathbf{x}_0$ , sendo  $\mathbf{x}_0$  uma escolha arbitrária qualquer.
2. Calcula-se em sequência:

$$\alpha_{k+1} = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T G \mathbf{p}_k}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_{k+1}G\mathbf{p}_k$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_{k+1}\mathbf{p}_k$$

3. Repetem-se os cálculos até que a norma  $L_2$  de  $\mathbf{r}_{k+1}$  fique abaixo de um valor mínimo ou atinja-se o número máximo de iterações.

O algoritmo acima é válido quando a matriz  $G$  é simétrica e positiva definida. Para realizar a inversão quando  $G$  é uma matriz qualquer, deve-se considerar a seguinte equação normal para o problema, que passa a ser chamado de Gradiente Conjugado para Mínimos Quadrados (*GCMQ* ou *CGLS* na sigla em Inglês):

$$G^T \mathbf{d} = G^T G \mathbf{x}. \quad (2.30)$$

O algoritmo mais geral é bem similar ao GC comum, tendo apenas algumas mudanças:

1. Considera-se:  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{d} - G\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 = G^T \mathbf{s}_0, \mathbf{q}_0 = G\mathbf{p}_0$ , sendo  $\mathbf{x}_0$  uma escolha arbitrária qualquer.
2. Calcula-se em sequência:

$$\alpha_{k+1} = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{q}_k}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{s}_k - \alpha_{k+1}G\mathbf{q}_k$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{k+1} &= G^T \mathbf{s}_{k+1} \\ \beta_{k+1} &= \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k} \\ \mathbf{p}_{k+1} &= \mathbf{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{q}_{k+1} &= G^T \mathbf{p}_{k+1}\end{aligned}$$

3. Repetem-se os cálculos até que a norma  $L_2$  de  $\mathbf{r}_{k+1}$  fique abaixo de um valor mínimo ou atinja-se o número máximo de iterações.

## 2.3 Tomografia sísmica

A palavra tomografia vem do grego, "*tomo*" significa seção e "*grafos*" (grafia) significa desenhar, representar (JONES, 2010). Tomografia pode então ser entendida como a obtenção de alguma propriedade de um meio estudado através de medidas externas ao mesmo (as quais atravessam seções deste), a fim de obter os valores da propriedade de interesse. Uma definição mais formal para tomografia é (SCALES et al., 2001): "A idéia da tomografia é usar valores observados de uma grandeza a qual está relacionada por uma integral de linha ao parâmetro físico que se deseja inferir."

No caso da sísmica, um grande desafio é determinar um modelo de velocidades em profundidade acurado que permita obter uma imagem sísmica final também em profundidade (através de migração em profundidade) (YILMAZ, 2001b). Neste contexto, a tomografia sísmica é uma ferramenta útil para determinar um modelo em profundidade mais acurado que o obtido apenas por outras técnicas, como a equação de Dix (YILMAZ, 2001b).

Há vários tipos de tomografia sísmica, cada uma possuindo limitações e vantagens. Conforme esperado, quanto mais acurado possível for o resultado pela técnica escolhida, mais dispendioso computacionalmente (logo, financeiramente) será a aplicação. A lista a seguir resume os principais tipos de tomografia sísmica disponíveis (JONES, 2010):

1. Baseada em traçamento de raios (*ray tracing*)

Tomografia por tempo de reflexão

Tomografia de transmissão poço-poço

Tomografia por tempo de refração

2. Baseada na forma da onda (*waveform*), usa a equação da onda.

Inversão da forma completa da onda (*FWI*, *Full Waveform Inversion*), pode receber outros nomes (*waveform tomography*, *wave equation tomography*).

Atualmente, o estado da arte para a tomografia sísmica é a *FWI* visto ser a técnica que pode fornecer os melhores resultados (WANG et al., 2011). Neste trabalho estudou-se um tipo particular de tomografia por tempo de trânsito (tomografia de refração). Por isso, discuti-se a seguir mais detalhes deste tipo de tomografia sísmica.

### 2.3.1 Formulação matemática da tomografia por tempo de trânsito

Neste tipo de tomografia, considera-se o trajeto que a onda sísmica (aqui se considera apenas ondas primárias, tipo P) faz entre a fonte e o receptor descrito por um raio e assim este tempo  $t$  (para um par fonte-receptor) é dado pela seguinte equação:

$$t = \int_{\mathbf{C}} u(\mathbf{r}) dl \quad , \quad (2.31)$$

onde  $u(\mathbf{r})$  é a vagarosidade (inverso da velocidade),  $\mathbf{C}$  é o caminho de integração,  $\mathbf{r}$  é o vetor posição e  $dl$  é comprimento de arco infinitesimal ao longo do caminho de integração.

A não-linearidade da Equação 2.31 ocorre porque o caminho de integração é função da vagarosidade,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{u}(\mathbf{r}))$  (ZHDANOV, 2002), que é a função a ser integrada na Equação 2.31. Isso também pode ser entendido ao notar-se que a trajetória do raio está diretamente relacionada à distribuição de vagarosidade no meio. Para linearizar este problema, basta expandir a Equação 2.31 em série de Taylor, em torno de um modelo de vagarosidade inicial  $u$ , até o termo de primeira ordem apenas (como feito na subseção 2.2.2) (MARTINS, 1992):

$$t(\mathbf{u}) = t(\mathbf{u}^0) + \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_{\mathbf{C}} u(\mathbf{r}) dl \right) \Bigg|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^0} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^0) \quad , \quad (2.32)$$

onde  $\mathbf{u}_j^0$  é a vagarosidade inicial escolhida,  $t(\mathbf{u}_j^0)$  é o tempo para o raio atingir o receptor ao se considerar o campo de vagarosidade  $\mathbf{u}_j^0$ .

Da Equação 2.32 obtém-se:

$$\delta t = \frac{\partial t_0}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \quad , \quad (2.33)$$

onde  $t_0 = \int_{\mathbf{C}} u(\mathbf{r}) dl \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^0}$ , que corresponde ao tempo de percurso da fonte ao receptor para o campo de vagarosidade  $\mathbf{u}_j^0$ .

Esta última equação pode ser resolvida conforme discutido anteriormente, uma vez que está linearizada.

### 2.3.1.1 Discretização do problema

Da Equação 2.33 fica fácil discretizar o problema, o que permite compreender como resolvê-lo na prática. Divide-se o modelo estudado em  $n$  células quadradas (outros tipos de discretizações são possíveis (LINES; NEWRICK, 2004)) e consideram-se  $m$  receptores. Então, a Equação 2.33 fica:

$$\delta t_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial t_i^0}{\partial u_j} \delta u_j \quad , \quad (2.34)$$

com  $i$  entre 1 e  $m$ ,  $j$  entre 1 e  $n$ .

A derivada na Equação 2.34 é o comprimento do raio para um par fonte-receptor em cada célula do modelo, esta variável pode ser expressa como  $l_{ij}$ . Pode-se reescrever a Equação 2.34 como:

$$\delta t_i = \sum_{j=1}^n l_{ij} \delta u_j. \quad (2.35)$$

E então, vetorizando o problema fica-se com:

$$\delta \mathbf{t} = L \delta \mathbf{u}. \quad (2.36)$$

Esta última expressão é análoga à Equação 2.23. Isso torna claro como então deve ser resolvido o problema da tomografia sísmica, exatamente com o algoritmo iterativo para um problema não-linear linearizado.

O cálculo dos tempos de trânsito para cada raio é feito de maneira discreta. Para isso, pode-se escrever uma expressão como:

$$\mathbf{t} = L \mathbf{u} \quad , \quad (2.37)$$

onde o vetor coluna  $\mathbf{t}$  tem  $m$  linhas ( $m \times 1$ ), o vetor coluna  $\mathbf{u}$  tem  $n$  linhas ( $n \times 1$ ) e matriz  $L$  tem dimensão  $m \times n$ . A matriz  $L$  é chamada de matriz tomográfica ou sensibilidade. Cada linha da matriz  $L$  representa um raio traçado e cada coluna desta matriz está associada à um parâmetro (componente de  $\mathbf{u}$ ). Além disso,  $L$  é uma matriz esparsa, ou seja, com praticamente todos os elementos nulos.

Para deixar claro como é feita a discretização e o significado de cada componente de  $L$  e dos vetores  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{u}$  deve-se observar a Figura 7.

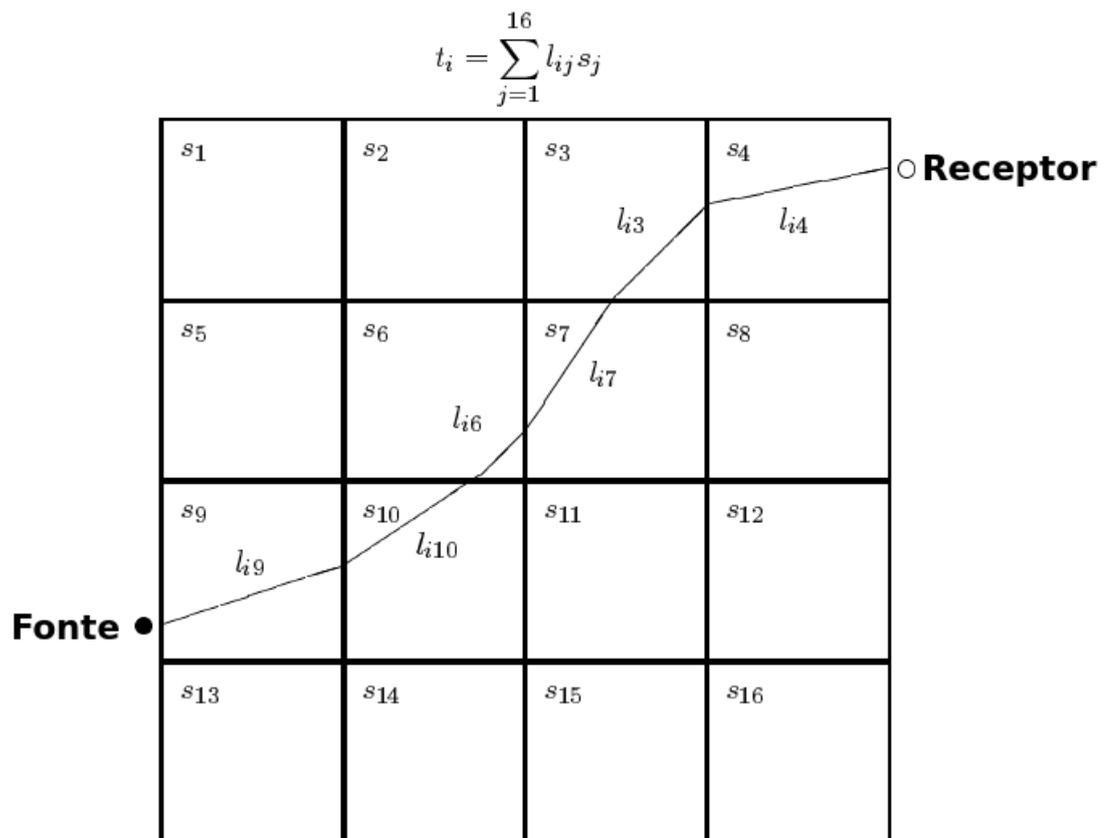


Figura 7 – Discretização do modelo de velocidades para a tomografia por tempo de trânsito. Mostra-se a escolha feita para identificar cada célula do modelo e como é definido cada componente da matriz  $L$ . Mostra-se o  $i$ -ésimo raio que cruza o modelo. Figura adaptada de Berryman (1991).

## 2.4 Tomografia de refração

A refração de ondas sísmicas, brevemente tratada em Capítulo 1, não ocorre sempre da maneira idealizada nas demonstrações feitas, uma vez que a subsuperfície de qualquer região é mais complexa que as situações apresentadas. Em geral, não se espera frequentemente a refração como modelada nas Figuras 2, 3, 4 (chamadas de *head waves*), mas sim como as ondas mergulhantes (*diving waves*) visto que em bacias sedimentares é mais frequente um gradiente suave da velocidade conforme se aumenta a profundidade.

Por isso, ao se tratar de tomografia sísmica de refração (tomografia por tempo de trânsito de ondas refratadas) deve-se considerar que há tanto as *head waves* quanto as *diving waves* (OSYPOV, 1999) e combinações destas. Assim, uma definição mais genérica para tomografia de refração é considerá-la como sendo a tomografia por tempo de primeira chegada quando fontes e receptores estão na superfície. Ou seja, a definição fica determinada pela geometria da aquisição sísmica.

Apesar de parecer confusa a explicação dada, a mesma fica esclarecida ao notar-se os diferentes nomes adotados na literatura para a tomografia de refração. Além de to-

tomografia de refração (WHITE, 1989; OSYPOV, 1999) outros nomes são: tomografia por tempo de primeira chegada (*first arrival travelttime tomography*) (TAILLANDIER et al., 2011); tomografia por raios de retorno<sup>3</sup>(*turning ray tomography*) (STEFANI, 1995); tomografia por ondas refratadas mergulhantes(*diving wave refraction tomography*) (TANIS et al., 2006). Neste trabalho será usada a nomenclatura de tomografia sísmica de refração (omitir-se-á o termo sísmica deste ponto em diante).

Um dos primeiro trabalhos de tomografia de refração é Hampson e Russel (1984) (apesar deste trabalho tratar da inversão generalizada linear, tal algoritmo é o mesmo de uma tomografia, mas pode considerar mais parâmetros no processo de inversão, como número de camadas). Outros trabalho é AMORIM et al. (1987) onde a tomografia de refração é usada para correção estática e também o trabalho de White (1989).

### 2.4.1 Implementação

Neste trabalho a tomografia por tempo de trânsito foi implementada com uso de um algoritmo de traçamento de raios, além da linearização do problema para resolução iterativa do sistema, conforme será explicado no Capítulo 3. Há contudo outras formas de implementação do algoritmo tomográfico e para a tomografia de refração, há inclusive técnicas cujo objetivo é tornar o processo completamente automático.

Um algoritmo para tomografia de refração sem a necessidade de traçamento de raios é proposto em Osypov (1999). Uma abordagem em que a modelagem direta é feita no domínio da frequência é apresentada em Pyun et al. (2005), Min e Shin (2006). Nestes trabalhos, a metodologia consiste em fazer a modelagem direta no domínio da frequência, mas com o uso de uma atenuação na modelagem (no domínio da frequência é simples implementar um fator de amortecimento para as amplitudes) cujo resultado final são as ondas diretas facilmente identificáveis do restante do dado gerado. Nessa abordagem, dispensa-se o traçamento de raios e pode-se definir a função objetivo com outras grandezas diferentes do tempo de primeira chegada (contudo associadas ao mesmo), como a fase das ondas da primeira chegada. Também é possível calcular a matriz tomográfica (derivada de Fréchet) quando se realiza a modelagem na frequência, sem contudo ser necessário traçar os raios, com a matriz obtida dessa forma igual ao resultado analítico (PYUN et al., 2005).

Além de não realizar o traçamento de raios, também se pode resolver a minimização da função objetivo por outros algoritmos. Um exemplo é o método adjunto (*adjoint state method*), empregado inclusive para tomografia de refração (TAILLANDIER et al., 2009). Este algoritmo permite uma grande eficiência computacional principalmente porque evita o armazenamento da matriz sensibilidade, sendo o limite computacional definido apenas pelo tamanho do modelo de velocidade discretizado (TAILLANDIER et al., 2009).

<sup>3</sup> Tradução livre feita pelo autor deste texto.

## 2.4.2 Limitações e vantagens

Assim como toda técnica de inversão, a tomografia de refração é limitada. Um fator para explicar suas limitações é o comprimento dos raios refratados. Quanto maior o comprimento do raio, por mais células do modelo discretizado este passa e portanto mais parâmetros cada raio relaciona com um único tempo de chegada registrado. Ou seja, como explanado em Stefani (1995): “a ambiguidade cresce com o comprimento dos raios”. E também com a relação entre o comprimento e o afastamento fonte-receptor (STEFANI, 1995).

A tomografia de refração, diferentemente da tomografia de reflexão, não possui ambiguidade entre profundidade do refletor e velocidade da interface (STEFANI, 1995). Então, esta é a razão de serem técnicas complementares.

Uma vantagem na tomografia de refração é a facilidade de identificar esse eventos nas seções de tiro (STEFANI, 1995), quando comparados a marcação de outros eventos. Por se tratar do primeiro evento do sismograma também torna mais factível a realização de um processo completamente automático. Há inclusive desenvolvimentos recentes para a marcação automática da primeira chegada (MOUSA et al., 2011). Esses métodos automáticos podem ser úteis em aplicações na indústria de óleo e gás, haja vista a grande quantidade de dados.

## 2.4.3 Problema de unicidade

A unicidade da solução de um problema inverso é relevante para que o problema seja bem-posto. Como já discutido, os problemas inversos de interesse em geral são mal-postos e para solucioná-los é preciso torná-los bem-postos através do uso de informações *a priori*, regularizações e qualquer recurso que limite as possíveis soluções.

Em Ivanov et al. (2005a) a unicidade de problemas inversos é discutida de maneira mais cuidadosa. A proposta deste trabalho é discutir os tipos de unicidade e os fatores que as provocam, a fim de identificar exatamente o tipo de não-unicidade para a inversão de tempos de refração. Assim, pode-se definir a melhor estratégia para resolver o problema. O autor propõe esta abordagem para resolver qualquer problema inverso, uma vez que entender o tipo de não unicidade auxilia em definir a melhor forma de resolvê-la.

Quatro tipos de não-unicidade são identificadas em Ivanov et al. (2005a), listadas abaixo. Na Figura 8 estão ilustradas seções em duas dimensões (portanto apenas dois parâmetros estão representados) das funções erros associadas à cada uma.

1. Tipo A: ocorre devido à erros nos dados observados. Pode ser resolvida através da suavização da inversão.

2. Tipo B: ocorre devido à não-linearidade do modelo físico (chamada de não-unicidade matemática). Os tipos C e D também ocorrem pela mesma razão. Possui apenas um mínimo global (mas outros mínimos locais). Solução pode ser encontrada através de informações *a priori* que limite a faixa de possíveis valores do mínimo global.
3. Tipo C: tem mais de um mínimo global. Sem informação *a priori* é impossível determinar a solução verdadeira do problema.
4. Tipo D: há um conjunto contínuo de mínimos globais (um vale na função erro). É preciso grande quantidade de informação *a priori* e não apenas o suficiente para se ter um bom modelo inicial. A solução verdadeira só é obtida caso se tenha  $n - 1$  parâmetros *a priori* para um problema com  $n$  parâmetros a se determinar.

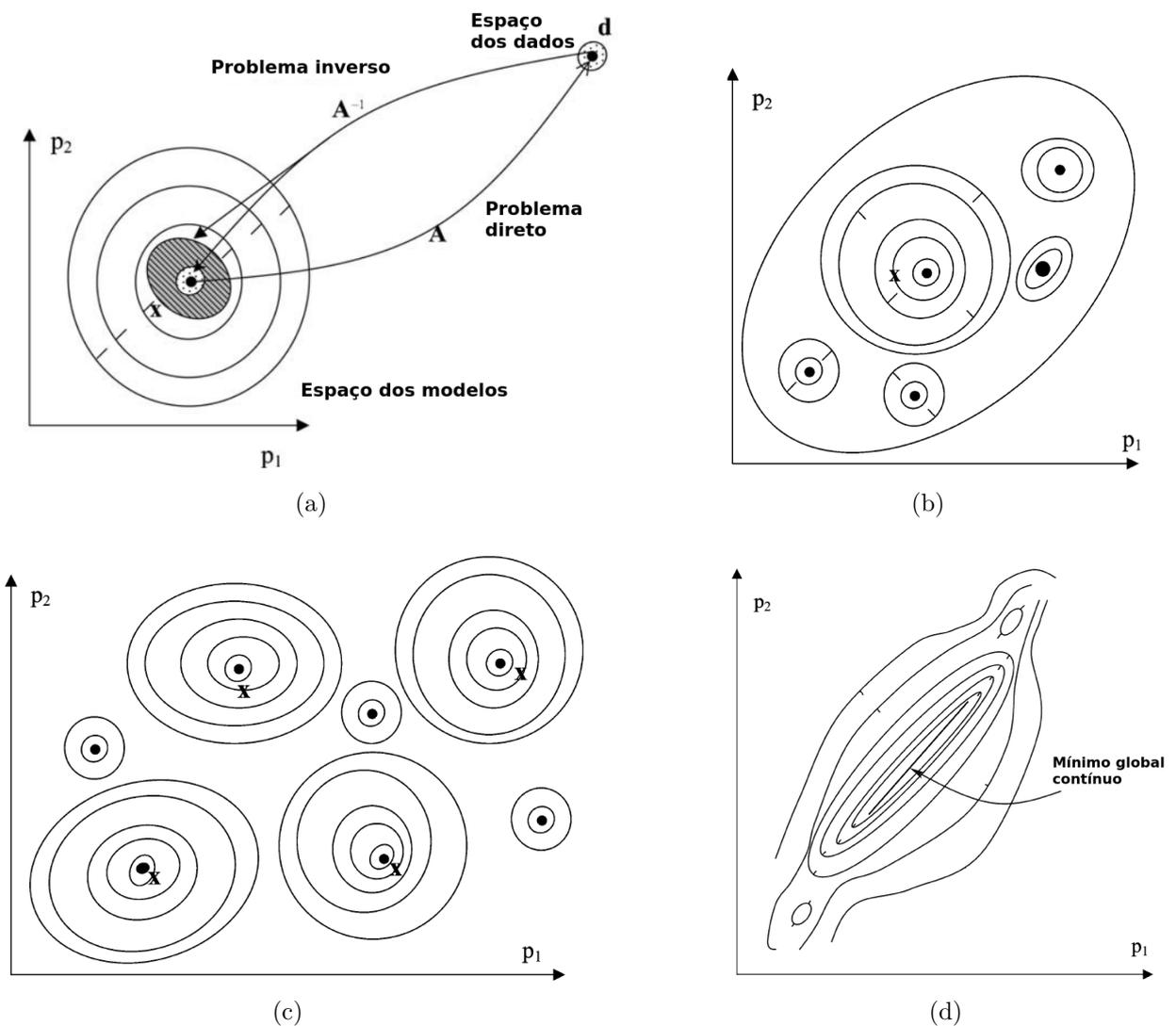


Figura 8 – Representação da função erro em duas dimensões de acordo com a classificação de Ivanov et al. (2005a). (a) Função erro para não-unicidade tipo A; (b) Função erro para não-unicidade tipo B, **X** indica um mínimo global; (c) Função erro para não-unicidade tipo C, **X** indica os vários mínimos globais; (d) Função erro para não-unicidade tipo D. Figuras adaptadas de Ivanov et al. (2005a).

Além das quatro classe apresentadas para não-unicidade, também é possível que haja composição delas. Por exemplo, pode-se ter mínimos locais (tipo B) com erros nos dados (tipo A) ou então vários vales de mínimos (tipo D). Ivanov et al. (2005a) identifica os cinco principais fatores responsáveis pela não-unicidade e como podem ocorrer no caso da tomografia de refração:

1. Insuficiência de dados para resolver o problema. Na tomografia de refração seriam as células do modelo não cobertas pelos raios.
2. Característica intrínseca do problema. No caso da tomografia de refração, quando há camadas cegas (velocidade mais baixa para camada mais profunda) estas não são cobertas pelo raios devido a característica do meio.
3. Erros nos dados.
4. Distribuição estatística dos dados não é gaussiana. Ou seja, um valor medido pode não ser representativo do modelo que está se usando para realizar a inversão.
5. Erro e instabilidade numérica.

Em Ivanov et al. (2005b) identifica-se que para a inversão de dados de ondas refratadas a não-unicidade é do tipo D. No trabalho mostra-se que a não-unicidade para a refração é intrínseca a mesma e que não está associada à erros ou insufiência nos dados de refração. Para chegar a essa conclusão é estudado o caso simples de um modelo com três camadas. O mesmo dado pode ser associado a três modelos diferentes, ilustrado na Figura 9. Contudo, deve-se tomar esta conclusão com cautela, uma vez que sua generalização para qualquer caso não foi demonstrada neste trabalho, apesar de ilustrar bem o tipo de complexidade relacionada a tomografia de refração.

Dessa forma, evidencia-se o desafio que é realizar a tomografia de refração. O problema da não-unicidade da tomografia de refração também explica porque o método pode não produzir resultados satisfatórios ou não obter resultados (IVANOV et al., 2005b). Caso não sejam determinadas e usadas as informações *a priori* suficientes a solução do problema não será satisfatória.

#### 2.4.4 Regularização

Usar a regularização é um recurso indispensável nos problemas de inversão sísmica e mais ainda no caso da tomografia de refração. Em geral, a regularização de Tikhonov de ordem um ou superior é usada nos problemas geológicos para garantir a suavidade horizontal dos parâmetros. Entretanto, no caso da tomografia de refração este uso deve ser mais cuidadoso. Uma vez que não há apenas um mínimo global, ao usar um regularizador

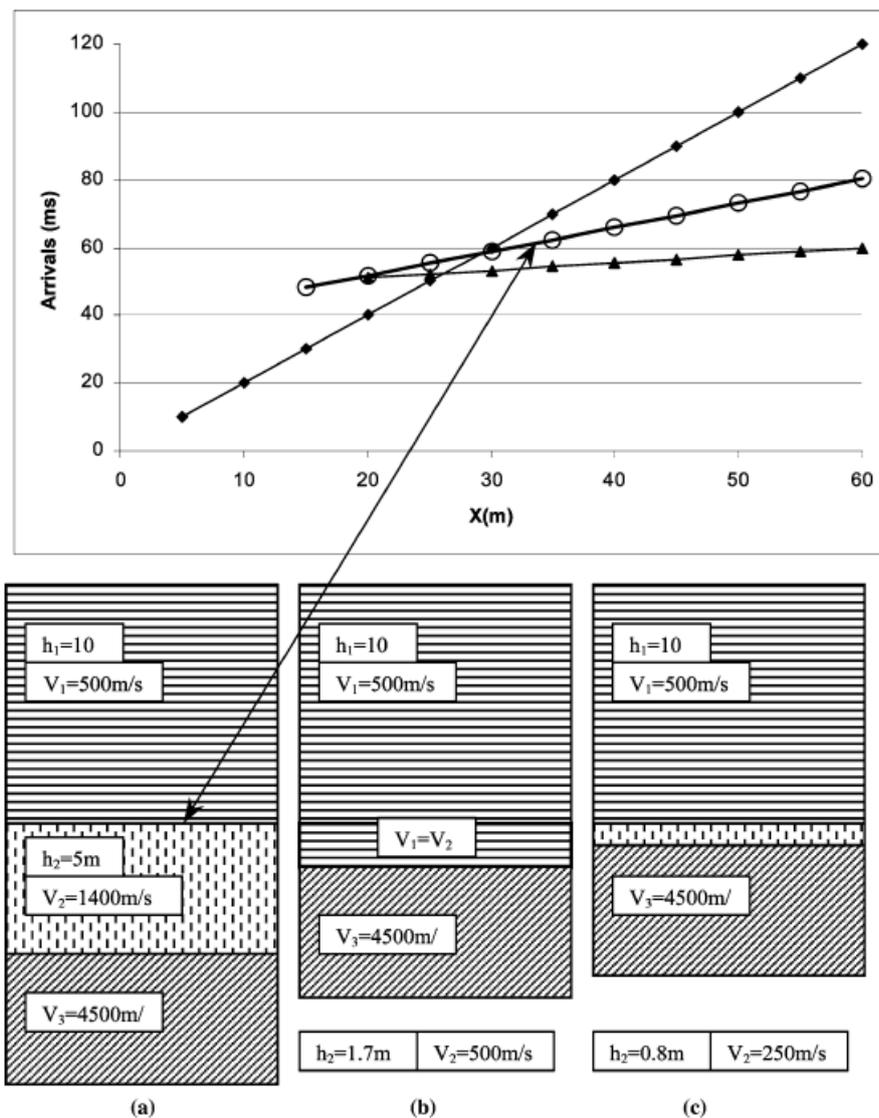


Figura 9 – Figura que mostra os três modelos que podem gerar os mesmos tempos de trânsito de ondas refratadas.  $h_i$  é a espessura da camada e  $V_i$  é a velocidade da camada, onde  $i$  pode ser 1, 2 ou 3. (a): cada camada com uma velocidade diferente e velocidade maior conforme aumenta a profundidade. (b): a segunda camada tem a mesma velocidade da primeira (ou seja, tem-se apenas duas camadas). (c): a segunda camada tem uma velocidade baixa. Figura retirada de Ivanov et al. (2005b).

que impõe a suavidade nos parâmetros invertidos pode-se chegar a uma solução que não necessariamente é a verdadeira (IVANOV et al., 2006). Além disso, toda a informação *a priori* deve ser usada e incorporada na tomografia.

Outra regularização que se pode usar é através da inclusão na função objetivo de um modelo de referência da qual a solução da tomografia deve ficar próxima. Em Ivanov et al. (2006) este modelo de referência é obtido através de um modelo de ondas S derivado de ondas superficiais. Nota-se que neste trabalho usou-se uma outra fonte de inferência, ondas superficiais, para obter um bom modelo de referência.

## 2.4.5 Aplicações

O uso mais citado na literatura para a tomografia de refração é na obtenção de modelo de velocidade (em profundidade) mais acurado para a parte rasa, com o objetivo de fazer a correção estática (LINES; NEWRICK, 2004). A curácia é maior porque pela tomografia obtem-se modelos com variações laterais de velocidade e também variações na profundidade da camada de intemperismo, a qual é usada na correção estática.

Segundo Stefani (1995), a tomografia de refração pode ser usada para interpretação litológica e no processo de migração sísmica. Outro uso é combinar a tomografia de refração com outras técnicas, como a tomografia de reflexão. Um exemplo deste uso é dado em Vesnaver et al. (1999), onde resultados melhores são obtidos com uma tomografia de reflexão e refração concomitante.

O trabalho feito em Kabir et al. (2008) é uma ilustração interessante de como a tomografia de refração pode ser usada com outros tipos, neste trabalho tanto tomografia de reflexão quanto tomografia com equação da onda. Este trabalho ilustra também a importância da parte rasa (*shallow depth*) do modelo para a obtenção de um modelo de velocidades final mais acurado, observação feita ao notar-se como problemas na parte rasa do modelo influencia o resultado final da migração dos dados.

Outra forma de juntar a tomografia de refração com outros dados é fazer o processo de inversão acoplado os dados de refração aos outros tipos de dados escolhidos. Isso significa, incluir na função erro não apenas o tempo de trânsito da refração, mas também de outros eventos, como por exemplo ondas superficiais. Este tipo de inversão é chamada de inversão conjunta (*joint inversion*), com um número crescente deste tipo de aplicação (RE et al., 2010).

No artigo de Zhu et al. (2008), é confirmada a importância da tomografia de refração para determinar satisfatoriamente modelos rasos de velocidade. Segundo Zhu et al. (2008) um modelo raso tem influência direta no resultado final da migração pré-empilhamento em profundidade. É também mostrada outras aplicações, como a caracterização de reservatórios rasos através de uma técnica de tomografia de refração azimutal.

Uma aplicação de interesse mais recente para a tomografia de refração é na construção do modelo inicial para inversão do campo total da onda (*FWI, Full Waveform Inversion*) (VIRIEUX; OPERTO, 2009). O interessante seria a possibilidade de deixar todo o algoritmo automático, porém há muitas limitações em usar apenas a tomografia de refração para obter um modelo inicial, devido as limitações inerentes ao uso apenas de ondas refratadas, conforme discutido ao longo deste capítulo.

## 2.4.6 Métodos de inversão não-tomográficos

Os métodos de interpretação de dados de ondas refratadas buscam obter um modelo para explicar os dados de refração e por isso podem ser considerados métodos de inversão. Dois desses métodos foram apresentados na seção 1.3. Apesar da simplicidade, quando comparado à tomografia, o método GRM pode apresentar resultados com acurácia comparável a tomografia de refração (PALMER; JONES, 2005). Contudo, isso é influenciado pela complexidade maior ou menor da região de interesse, quanto mais complexa maior a chance de sucesso para a tomografia conforme já discutido (subseção 2.4.5).

Os métodos de interpretação podem ser úteis para fornecer um bom modelo inicial para a tomografia de refração. Isso é análogo ao que se faz para com a tomografia de reflexão em que se parte de um modelo já considerado acurado (YILMAZ, 2001b), evitando problemas devido ao modelo inicial para a tomografia.

## 3 Metodologia

Neste capítulo estão explicados os algoritmos usados neste trabalho e alguns detalhes de sua implementação. O objetivo é fornecer as informações que são úteis para entender as limitações e vantagens dos métodos utilizados no trabalho. A partir das explicações dadas aqui, acredita-se que fiquem claros os detalhes necessários para as implementações computacionais. A última seção tenta explicar alguns detalhes importantes para o desenvolvimento de todo o trabalho.

### 3.1 Parametrização do modelo

Esta etapa consiste em definir quais os parâmetros definem o modelo estudado e tenta-se escolher a que melhor satisfaz o objetivo das técnicas empregadas. Neste trabalho o objetivo é obter as velocidades de ondas P para a área considerada, logo um dos parâmetros é a velocidade de ondas P em subsuperfície.

A discretização do modelo é feita através da divisão do mesmo em células, em que cada uma tem um valor de velocidade associado. Pode-se escolher diferentes geometrias para as células, mas neste trabalho usou-se células quadradas em todas as etapas. Além disso, os tamanhos das células são mantidos fixos. Há a possibilidade de se trabalhar com variação no tamanho das células, mas isso não foi considerado aqui.

O número de células varia conforme o tamanho escolhido para as mesmas. Procurou-se escolher um tamanho de célula que mantivesse a resolução dos resultados aceitável ao mesmo tempo que não inviabilizasse a execução dos algoritmos, uma vez que o tempo de execução computacional é influenciado diretamente pelo número de parâmetros.

Foram feitos testes com diferentes tamanho de modelo. Para a tomografia de refração usou-se a dimensão horizontal igual a no mínimo cinco vezes o comprimento da direção vertical. Isso é necessário para garantir que se tenham ondas refratadas nas posições dos receptores.

### 3.2 Cálculo do tempo de trânsito

O tempo de trânsito precisa ser calculado para que a partir desse se faça o traçamento de raios. Essas duas etapas estão intrinsicamente relacionadas na metodologia usada neste trabalho, adaptada do trabalho de Podvin e Lecomte (1991). A escolha desse

método ocorreu principalmente pelas seguintes razões: permite o uso de modelos de velocidade com grandes contrastes de velocidade, até 1:10 (PODVIN; LECOMTE, 1991); prevê ondas refratadas (*head wave, diving waves*, o que pode não ocorrer em outros métodos de traçamento de raios (CAPUCCI, 2013); pode ser paralelizado computacionalmente; acurácia do método (CAPUCCI, 2013).

O método proposto em Podvin e Lecomte (1991) usa diferenças finitas entre os tempos nos nós das células (pontos onde os tempo de trânsito são calculados), as quais discretizam o modelo de velocidade, para calcular o tempo de trânsito em novos pontos. De acordo com Podvin e Lecomte (1991), o trabalho que deu origem ao uso de métodos de diferenças finitas no cálculo dos tempos de trânsito foi o de Vidale (1988). Este último baseia-se numa solução discreta para a equação eikonal (aproximação da equação eikonal por diferenças finitas (PODVIN; LECOMTE, 1991)), aproximada considerando a propagação por frentes de onda planas e/ou circulares.

O algoritmo proposto por Podvin e Lecomte (1991) também usa diferenças finitas, mas sua formulação evita problemas onde há contrastes grandes de velocidade. O método não considera apenas uma solução aproximada por diferenças finitas para a equação eikonal, de forma que considera discontinuidades do gradiente do tempo de trânsito de primeira chegada (soluções irregulares da equação eikonal) (PODVIN; LECOMTE, 1991). Para isso, em cada ponto onde se calcula o tempo de trânsito, múltiplas chegadas são consideradas e por um critério de primeira chegada determina-se o valor correto (PODVIN; LECOMTE, 1991).

Baseado em Podvin e Lecomte (1991), explica-se o algoritmo. Considera-se a Figura 10, em que se tem os tempos de trânsito nos pontos escuros e deseja-se calcular no ponto branco ( $P$ ). A vagarosidade ( $s$ ) é constante em cada célula.

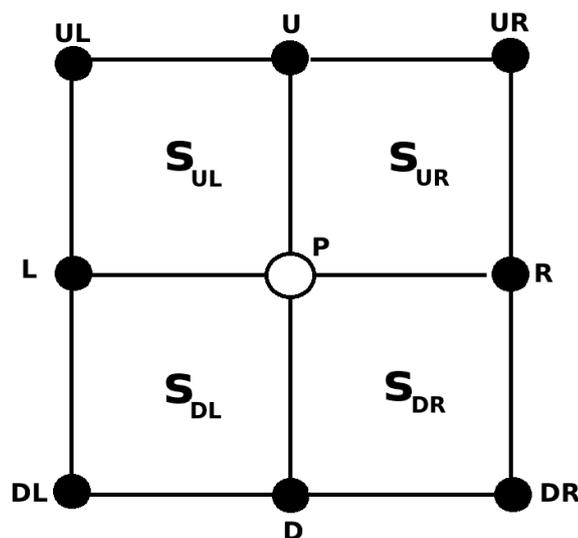


Figura 10 – Ponto  $P$  é onde se quer calcular o tempo de trânsito, a partir dos tempos conhecidos (pontos escuros). Terminologia da malha ilustrada está descrita no texto. Adaptado de Podvin e Lecomte (1991)

Há 3 possibilidades de tipos de frente de onda que podem atingir o ponto  $P$  e que devem ser calculadas e seleciona-se como tempo de trânsito no ponto  $P$  o resultado com menor valor. As possibilidades são: 8 transmissões 2-D (pares formados pelos pontos  $UL$ ,  $UR$ ,  $DL$  e  $DR$ ; cada ponto forma dois pares); 4 transmissões 1-D (pontos  $U$ ,  $D$ ,  $L$  e  $R$ ); 4 difrações (pontos  $UL$ ,  $UR$ ,  $DL$  e  $DR$ ). A seguir, explica-se como se calcula o tempo para cada um dos casos. Consideram-se células quadradas com lado  $h$ , vagarosidades no ponto  $i$ ,  $s_i$  e  $t_i$  como tempo no ponto  $i$ , tudo conforme a Figura 10.

Toma-se a interface formada pelos pontos  $DL$  e  $D$  (analogamente para os outros pares de pontos). Para uma onda plana que atravessa essa interface, tem-se que a transmissão 2-D leva ao seguinte tempo de trânsito no ponto  $P$ :

$$t_P = t_D + \sqrt{(hs_{DL})^2 - (t_D - t_{DL})^2}. \quad (3.1)$$

A transmissão 1-D a partir do ponto  $L$  fornece como tempo de trânsito em  $P$ :

$$t_P = t_L + h \min(s_{DL}, s_{UL}) \quad , \quad (3.2)$$

onde  $\min(s_{DL}, s_{UL})$  indica o menor valor de vagarosidade entre as células adjacentes à  $\overline{LP}$ , já que se busca o menor tempo.

A difração, considerada a partir do ponto  $DL$  fornece para o tempo em  $P$ :

$$t_P = t_{DL} + hs_{DL}\sqrt{2}. \quad (3.3)$$

Antes de se começar a iteração em toda a malha, o tempo em todos os pontos são inicializados como tendo valor infinito (computacionalmente, escolhe-se um valor alto) com exceção do ponto onde está a fonte que tem tempo nulo. Em cada iteração percorrem-se todos os pontos e não é mais necessário fazer iteração quando não há mais alteração nos tempos calculados em todas as células.

O número de iterações segundo Podvin e Lecomte (1991) é aproximadamente da ordem da maior distância da fonte as bordas do modelo (em termos de  $h$ ). Entretanto, foi verificado que menos iterações são suficientes, conforme Figura 11. Observa-se que é suficiente um número de iterações da ordem da maior dimensão do modelo usado. A aproximação por frentes de ondas planas explica porque nas proximidades da fonte a acurácia deste algoritmos é falha, já que esta aproximação perde a validade (PODVIN; LECOMTE, 1991).

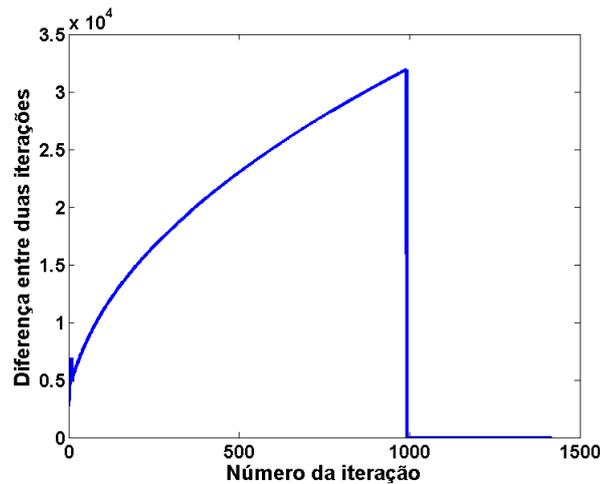


Figura 11 – Valor médio da diferença entre os tempos de trânsito em toda a malha entre duas iterações sucessivas em função do número de iterações, para uma malha quadrada com 1000 células em cada lado.

### 3.3 Algoritmo de traçamento de raios e obtenção da matriz tomográfica

Uma vez obtido os tempos de trânsito, o traçamento dos raios (*ray tracing*) pode ser feito. Neste trabalho usa-se apenas o tempo de primeira chegada, logo os raios traçados representam a trajetória das ondas que chegam primeiro aos receptores. Cada raio traçado representa a trajetória da primeira chegada em um receptor, ou seja, a trajetória entre a fonte e o receptor.

O ponto inicial para traçar um raio sempre é a localização do respectivo receptor, visto que nas proximidades da fonte a acurácia do tempo de trânsito calculada é menor. Essa escolha evita problemas de instabilidade na direção de traçamento do raio que poderia ocorrer caso a trajetória traçada para o mesmo fosse iniciada na fonte. A Figura 12 ilustra como fica a trajetória do raio nas proximidades da fonte, com a escolha do ponto de início como o receptor e justifica tal escolha.

Segundo o princípio de Fermat, o caminho que um raio percorre busca minimizar o tempo total da trajetória deste. Seguindo esse princípio, a direção que o raio deve seguir é dada pela direção oposta ao gradiente do tempo de trânsito. Uma vez que o tempo de trânsito é calculado de maneira discreta, o gradiente desta grandeza é calculado por diferença finita.

A trajetória do raio é calculada ponto à ponto (coordenadas  $x$  e  $z$ , visto que o problema é 2-D). A distância entre cada coordenada do raio ( $dS$ ) é fixa e com valor menor que a discretização das células do modelo. Isso tem como objetivo aumentar a acurácia da trajetória determinada.

Resume-se então o traçamento dos raios como:

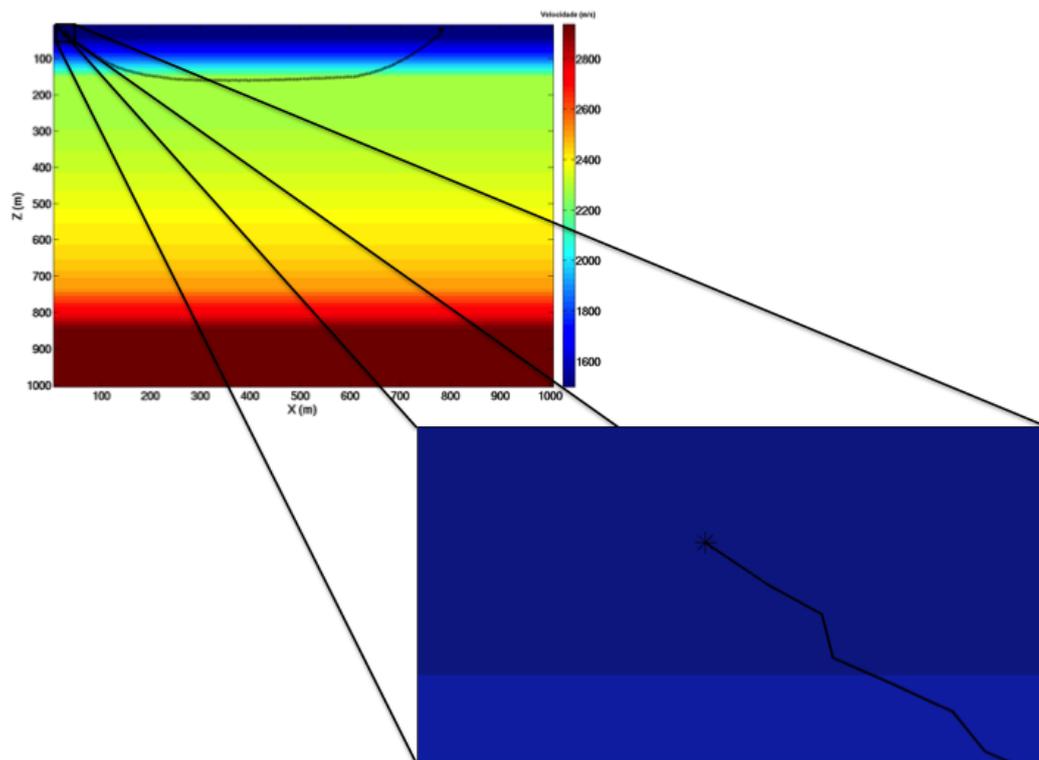


Figura 12 – Trajetória de um raio nas proximidades da fonte. Percebe-se como a direção varia conforme a fonte fica mais próxima.

1. Cálculo do gradiente do tempo de trânsito calculado.
2. Toma-se as coordenadas do receptor como início da trajetória do raio e a direção neste ponto é determinada pelo gradiente do tempo de trânsito (direção oposta à esse gradiente).
3. A coordenada seguinte é determinada somando-se a coordenada anterior a distância  $dS$ , na direção correta (direção oposta ao gradiente do tempo de trânsito).
4. O novo ponto agora é tomado como origem. Repete-se a iteração anterior. Quando a distância entre a coordenada obtida para o raio e a posição da fonte for menor que a discretização da célula o processo iterativo é interrompido. O último ponto da trajetória é a posição da fonte.

O traçamento dos raios é feito separadamente para cada receptor considerado no algoritmo. Entre os cuidados que se deve tomar ao usar esse algoritmo destaca-se: receptores muito próximos à borda do modelo podem levar a divergência no traçamento dos raios; proximidade extrema entre fonte e receptor deve ser evitada; o incremento  $dS$  deve ser escolhido apropriadamente para se manter a acurácia em um nível razoável.

O principal objetivo do traçamento dos raios é obter a matriz tomográfica (derivada de Fréchet). Contudo, observar o traçado dos raios em todo o modelo também

é uma ferramenta para verificar quais áreas tem maior cobertura (maior densidade de raios), logo fornecerão melhor resposta pelo método tomográfico. A Figura 13 ilustra o resultado do traçamento de raios em um modelo de velocidades com camadas plano paralelas horizontais, com um gradiente de velocidade na direção vertical

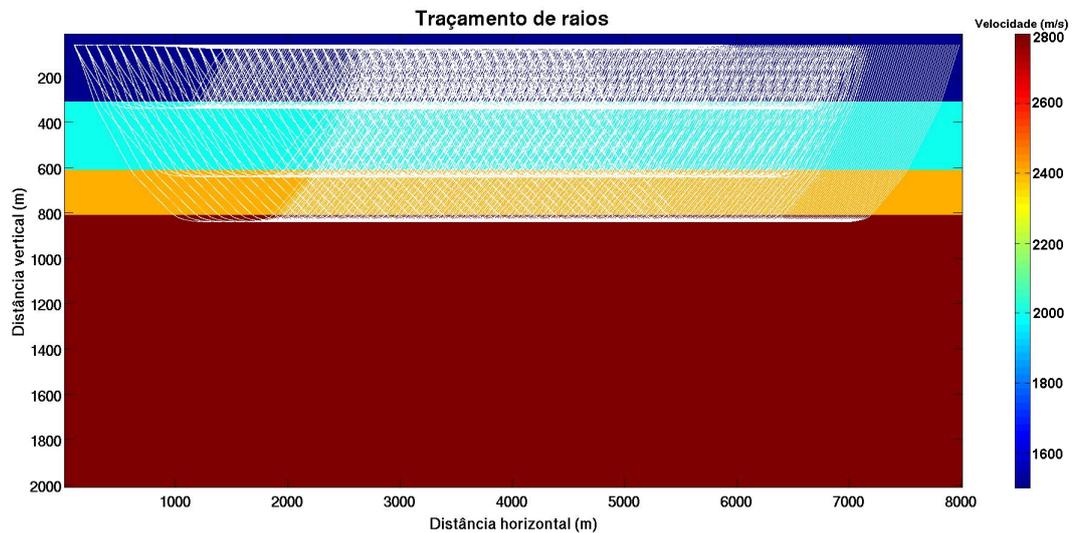


Figura 13 – Resultado do traçamento de raios com o algoritmo usado em um modelo de exemplo.

Para obter a matriz tomográfica deve-se usar a trajetória de cada raio traçado. Cada linha desta matriz é um raio traçado e as colunas correspondem ao respectivos parâmetros (velocidade de onda P) no modelo. Assim, em uma linha cada elemento corresponde ao comprimento do segmento do respectivo raio em uma célula do modelo. O índice para as células do modelo é escolhido como já mostrado na Figura 7. Destaca-se que a matriz tomográfica é uma matriz esparsa, já que é formada predominantemente por valores nulos. Essa conclusão é facilmente tirada ao observar-se a Figura 7.

### 3.4 Dados sintéticos

Dados sintéticos foram usados em todos os testes realizados neste trabalho. Sua obtenção consiste na resolução do problema direto: dado o modelo geológico de velocidades obter os tempos de trânsito nos receptores (posição conhecida), com a posição da fonte conhecida.

Para ser consistente com o algoritmo de inversão, em que se usa a matriz tomográfica, a modelagem direta também foi feita com essa matriz. Assim, a partir da matriz tomográfica para o modelo calcula-se o tempo de trânsito nas posições de interesse. Em termos matemáticos:

$$\mathbf{t} = G\mathbf{s} \quad , \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{t}$  é o vetor coluna com os tempos de trânsito,  $G$  é a matriz tomográfica e  $\mathbf{s}$  é ao vetor coluna com as vagarosidades do modelo.

### 3.4.1 Dados sintéticos com ruído branco

Além do dado obtido apenas com a modelagem direta, também foram obtidos dados com ruído. Os dados com ruído correspondem ao dado obtido na modelagem direta acrescido de um ruído branco (distribuição gaussiana). O ruído branco usado foi um valor obtido pelo sorteio pseudo-aleatório de um número segundo uma distribuição gaussiana, com desvio padrão igual ao valor que se espera para o erro na obtenção do tempo de primeira chegada (4 ms). O desvião padrão ( $\sigma$ ) para a distribuição gaussiana significa que 68,27% dos valores sorteados encontram-se entre a média ( $\mu$ ) e o valor de  $\sigma$ , ou seja, entre  $\mu - \sigma$  e  $\mu + \sigma$ .

## 3.5 Tomografia sísmica

O algoritmo tomográfico está mostrado na Figura 14. Como discutido na seção 2.3, a tomografia sísmica implementada neste trabalho é uma forma linearizada do problema, cuja solução é buscada de forma iterativa. Algumas etapas mostradas na Figura 14 estão explicadas a frente.

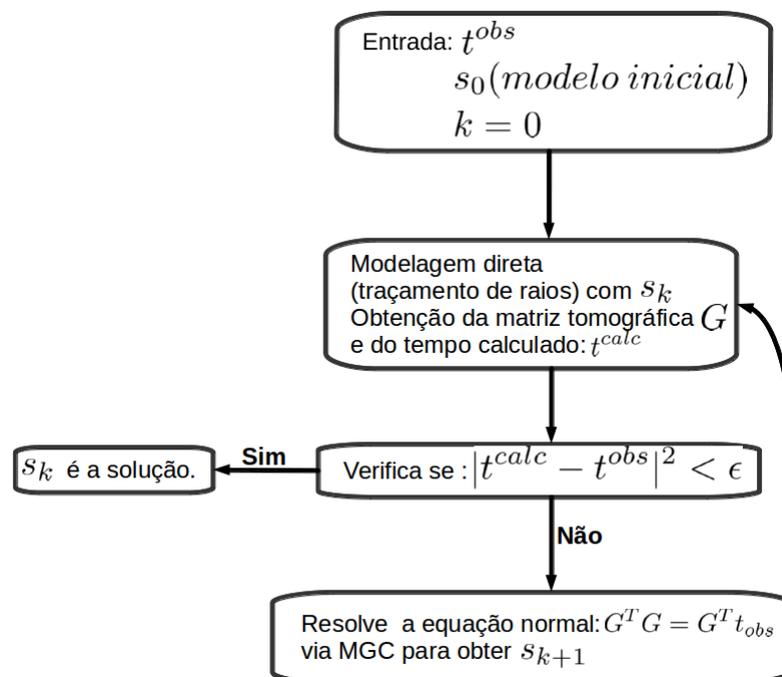


Figura 14 – Algoritmo tomográfico utilizado.

### 3.5.1 Regularização

Conforme visto ao final da subseção 2.1.3.1, para considerar a regularização da matriz  $G$  (ou outra qualquer) basta aumentá-la concatenando a matriz regularizadora. Ao mesmo tempo aumenta-se o vetor de dados observados ( $d$ ), de acordo com a regularização implementada.

A matriz regularizadora tem o mesmo número de colunas que a matriz tomográfica, já que os operadores regularizantes atuam nos parâmetros a serem invertidos. O número de linhas pode ser diferente, pois a regularização pode ser realizada só em parte do modelo. Isso pode ser feito, por exemplo, quando se deseja suavizar apenas parte de um modelo via regularização de Tikhonov de ordem 1. Essa abordagem também torna possível regularizar de forma diferente regiões do mesmo modelo.

### 3.5.2 Modelo inicial

A escolha do modelo inicial é uma tarefa determinante no sucesso da tomografia e mais ainda na tomografia de refração. Entre as opções testadas, usou-se como modelo inicial: modelo completamente homogêneo (velocidade igual em todas as células); versão suavizada do modelo original que gerou os dados sintéticos. A versão suavizada do modelo original foi obtida com a aplicação de um filtro média móvel, idêntico ao usado no tratamento *a posteriori*.

É importante lembrar que a influência do modelo inicial em problemas não-lineares foi explicada na subseção 2.2.2. O modelo inicial é o ponto no espaço de soluções próximo ao qual o algoritmo busca a solução verdadeira. Portanto, quanto mais perto do mínimo global procurado (solução verdadeira) mais provável desta solução ser encontrada. E de forma oposta, a escolha do modelo inicial pode fazer com que a solução verdadeira não seja encontrada.

### 3.5.3 Informação *a priori* e tratamento *a posteriori*

Deve-se tentar usar toda e qualquer informação que se tenha sobre o sistema a ser invertido, haja visto a dificuldade em se chegar a solução verdadeira em uma inversão. As informações *a priori* servem para restringir as possíveis soluções da tomografia (e de qualquer problema inverso).

Informações *a priori* podem ser valores conhecidos dos parâmetros em alguns pontos, como por exemplo, velocidades de onda P medidas diretamente em um poço. Apesar de se tratar de uma informação sobre uma área bem limitada e que nem sempre pode ser extrapolada, ter o valor medido da grandeza a ser invertida fornece grande confiabilidade no processo de inversão. Na tomografia de refração não foi considerada informação de

poço, mas se considerou o valor da velocidade na primeira camada e sua profundidade conhecida como um teste.

Outro tipo de informação *a priori* são restrições aos valores invertidos. Isso garante que valores impossíveis de serem encontrados não permaneçam como resultado da tomografia. Evita-se dessa forma que haja ocorrência de valores negativos de vagarosidade ou valores incompatíveis com a área de interesse (como velocidades acima ou abaixo de valores limites). A aplicação de restrições desse tipo, quando realizada, foi feita como etapa seguinte a obtenção da vagarosidade via GC, podendo ser inclusive incluída no algoritmo do GC.

Uma etapa importante é o tratamento de suavização *a posteriori* que deve ser realizado após a resolução do sistema linearizado via GC. Os valores obtidos de velocidade devem ser suavizados com algum tipo de média para que haja uma continuidade mínima do campo de velocidade. Para isso pode-se utilizar um filtro média móvel em cada ponto do modelo. Neste trabalho foi usado um filtro média móvel em duas dimensões para cada ponto do modelo, explicitado pela relação:

$$s_{i,j}^{suavizado} = \frac{1}{N} \sum_{l=-par}^{par} \sum_{k=-par}^{par} s_{(i+l),(j+k)}^{inicial} \quad , \quad (3.5)$$

com  $s_{i,j}^{suavizado}$  sendo o valor de vagarosidade após suavização,  $s_{i,j}^{inicial}$  o valor de vagarosidade antes da suavização e  $par = (\frac{win-1}{2})$ , com  $win$  igual ao tamanho da janela escolhida para a média móvel em duas dimensões.

Mesmo com as restrições *a priori* impostas, antes de suavizar o campo de velocidade por média móvel deve-se garantir que não haja valores discrepantes presentes. Caso isso ocorra, a média móvel pode não ser suficiente e ter o efeito oposto ao procurado, ou seja, piorar a solução encontrada. O valor da janela da média móvel também deve ser escolhido de forma que não se reduza muito a resolução, visto este ser um efeito negativo de suavizar os valores através de uma média. Neste trabalho, os valores usados em cada caso são indicados nas respectivas figuras.

### 3.6 Aspectos computacionais

Todos os algoritmos para a tomografia apresentam vantagens. Entretanto, a implementação computacional dos mesmos possui particularidades que são pontos de dificuldades, natural ao escrever-se códigos em qualquer linguagem.

Todos os códigos utilizados neste trabalho foram feitos em Fortran 90. Contudo, alguns foram primeiro implementados em Matlab. O código para o cálculo do tempo de trânsito e traçamento de raios já estavam implementados em Matlab pelo Grupo ISIS (Grupo de Imageamento Sísmico e Inversão Sísmica), tendo o autor deste trabalho apenas

os validado e em seguida adaptados ao Fortran 90. O GC, o algoritmo para obter a matriz tomográfica, o algoritmo de regularização e média móvel foram completamente implementados pelo autor deste trabalho.

O algoritmo de cálculo de tempo de trânsito pode ter parte do código paralelizada localmente e isso foi feito via OpenMP. Essa opção foi muito importante para reduzir o tempo de execução desta etapa, principalmente com modelos com grande quantidade de células ( $10^5$  células). A etapa mais custosa computacionalmente (e por isso mais demorada) é na modelagem direta, mais especificamente na obtenção dos tempos de trânsito. As outras etapas da modelagem direta são mais rápidas, já que envolvem menos operações. Por isso, reitera-se a importância da paralelização via OpenMP no cálculo do tempo de trânsito.

A obtenção da matriz tomográfica é outro ponto importante no algoritmo tomográfico. Visto que se trata de uma matriz esparsa é essencial que essa característica seja usada na implementação computacional. Não é viável que se armazenem todos os elementos da matriz tomográfica, mas apenas os que são diferentes de zero. O mesmo vale para as operações realizadas com essa matriz.

Todos os algoritmos que envolvem a matriz tomográfica utilizam a esparsidade da mesma para tornar possível a resolução computacional do problema. Além da matriz tomográfica, as matrizes regularizantes também foram usadas considerando-se sua esparsidade. Utilizou-se o esquema de índice completo (*full index scheme*) para se trabalhar com as matrizes esparsas e realizar as operações matemáticas necessárias. Devido à sua importância, segue-se uma breve explicação deste método de trabalhar com matrizes esparsas. Os exemplos e explicações foram retiradas de Scales et al. (2001).

### 3.6.1 Operações com matrizes esparsas

O esquema de índice completo consiste em usar três vetores para representar a matriz esparsa. Um vetor contém os valores dos elementos diferentes de zero da matriz esparsa (vetor *elem*), outro contém os índices (respeitando a ordenação em que foi construído *elem*) das colunas correspondentes a cada elemento (*icol*) e o terceiro vetor contém os índices das linhas (*irow*). Dessa forma pode-se identificar os elementos de uma matriz *A* qualquer assim:

$$elem(i) = A(irow(i), icol(i)) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad , \quad (3.6)$$

com *N* sendo o número de elementos diferente de zero na matriz esparsa.

As duas operações necessárias para todos os algoritmos foram a multiplicação da matriz tomográfica por um vetor e a multiplicação da transposta da matriz esparsa por

um vetor. Assim, segue como são feitas as duas operações quando se trabalha com uma matriz esparsa segundo o esquema de índices completos.

Segue o pseudo-código para a multiplicação da matriz  $A$  pelo vetor  $x$ :

```

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = 0;$$

$$\text{for } i = 1, N$$

$$y(irow(i)) = y(irow(i)) + elem(i) * x(icol(i))$$

$$\text{end}$$

```

E o pseudo-código para a multiplicação da matriz  $A^T$  pelo vetor  $x$ :

```

$$\mathbf{y} = A^T\mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = 0;$$

$$\text{for } i = 1, N$$

$$y(icol(i)) = y(icol(i)) + elem(i) * x(irow(i))$$

$$\text{end}$$

```

## 4 Resultados e Discussão

Os resultados estão divididos em duas partes principais: validação do algoritmo tomográfico e tomografia de refração. A validação foi feita com o objetivo de entender as limitações do algoritmo usado para a tomografia, a fim de permitir uma melhor avaliação dos resultados de interesse deste trabalho, a tomografia de refração.

A tomografia de refração é bem limitada no alcance vertical, uma vez que só atinge as profundidade em que o fenômeno de refração ocorre. Isso explica o grande uso da técnica em estudos de modelos rasos. A limitação da tomografia de refração pode ser observada, por exemplo, ao comparar-se os resultados obtidos neste trabalho com os de Capucci (2013), em que se fez tomografia poço-a-poço.

Os resultados da tomografia sempre são apresentados junto com a discrepância percentual em relação ao modelo original. Essa discrepância é calculada como a razão percentual entre: o valor absoluto da diferença da velocidade obtida pela tomografia e a velocidade do modelo original, e a velocidade do modelo original.

### 4.1 Validação do algoritmo tomográfico

Cada algoritmo implementado (descritos no Capítulo 3) para uso na tomografia sísmica deste trabalho foi testado para garantir que os resultados obtidos são conforme se espera. Entretanto, mesmo com todos os algoritmos corretamente implementados há limitações, como relacionados aos limites da precisão numérica que estes algoritmos tem. Outra limitação que se pode citar é a aproximação linear considerada para o algoritmo tomográfico, conforme descrito em subseção 2.3.1, ou seja, a solução sempre é encontrada de forma aproximada.

Dessa forma, realizar testes com condições ideais permite verificar o quão limitada é a tomografia sísmica usada neste trabalho. O caso em que é possível para a tomografia dar uma solução perfeita ocorre quando há cobertura total da área estudada. Em problemas de Geofísica, com a tecnologia atual, é impossível obter essa cobertura, mas como validação do algoritmo e eficácia do mesmo, é uma etapa importante.

Os modelos usados nessa etapa tem tamanho de 400 metros, na vertical e na horizontal, e foram discretizados por células quadradas de dimensão 10 metros, resultando em um total de 1600 parâmetros. A geometria de aquisição considerada está ilustrada na Figura 15, onde o símbolo \* indica as posições das fontes e ▼, as posições dos receptores.

São 33 tiros em cada parte da geometria mostrada na Figura 15, num total de 6336 tempos de trânsito de primeira chegada obtidos.

Observa-se que os receptores e fontes não foram colocados na borda do modelo e isto foi feito com o objetivo de evitar problemas de borda na etapa de traçamento dos raios. Dessa forma, a área em que os parâmetros serão efetivamente invertidos é aquela delimitada pelos receptores e fontes. Optou-se por não omitir nas figuras esse detalhe para enfatizar como se implementa na prática o algoritmo.

### 4.1.1 Modelo 1

O modelo de velocidades (Figura 15) consiste em uma região com velocidade homogênea ( $2000m/s$ ) e duas anomalias (a maior com velocidade de  $1700m/s$  e a menor com velocidade de  $1800m/s$ ). Não se buscou analogia com nenhuma situação geológica na escolha deste modelo. As anomalias tem formas retangulares e contraste bruscos de velocidade com o objetivo de tornar mais difícil a inversão tomográfica, uma vez que os resultados da tomografia são inerentemente suavizados e em subsuperfície as velocidades variam, em geral, de forma mais suave.

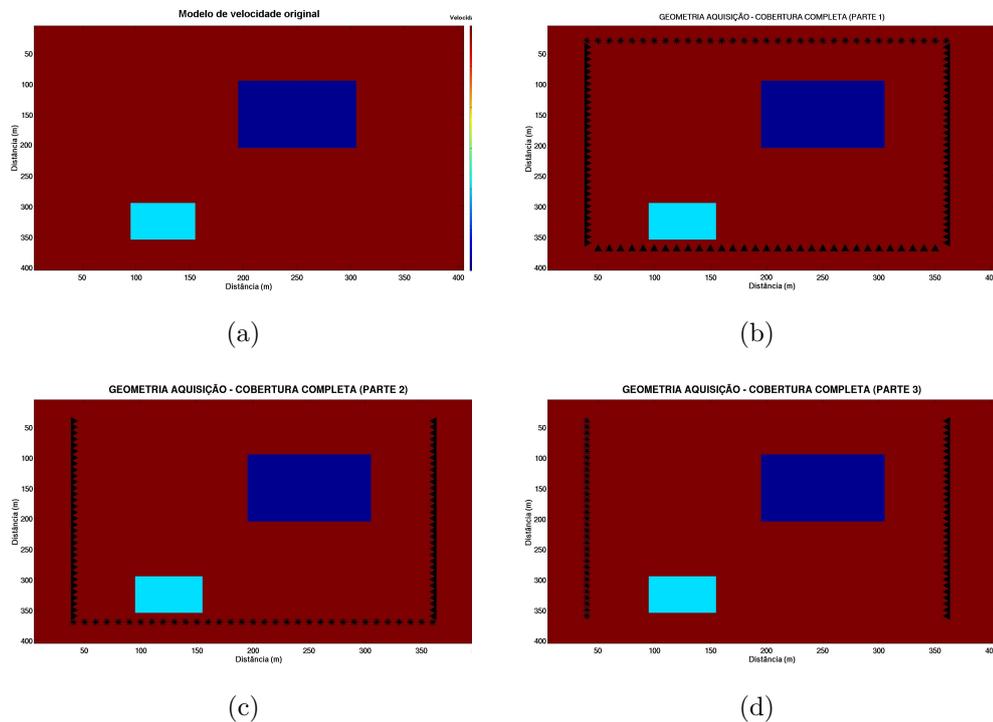


Figura 15 – Primeiro modelo usado na validação do algoritmo tomográfico e geometria de aquisição para cobertura total. (a) Modelo de velocidades original. (b), (c), (d) Posições das fontes (\*) e receptores (▼).

Como se tem cobertura total, o modelo inicial escolhido é totalmente homogêneo com velocidade de  $1900m/s$ . Além disso, não utilizou-se nenhuma informação *a priori* para que se teste o limite da tomografia neste caso de cobertura total.

No primeiro teste realizado, cujo resultado está na Figura 16, não houve nenhum tratamento *a posteriori*, nem mesmo a suavização do modelo obtido (como descrito na subseção 3.5.3) antes de obter a matriz  $G$  para a próxima iteração tomográfica, o que é indicado por  $win = 0$ .

Da Figura 16, nota-se que a diferença (percentual) entre o modelo invertido e o modelo original é predominantemente menor que 2.5%. Observa-se também que mesmo com o modelo inicial completamente homogêneo, as duas anomalias presentes no modelo original ficam evidentes no resultado da tomografia. As maiores discrepâncias são observadas nas proximidades da anomalia com menor valor de velocidade (1700m/s) e no interior da mesma, logo definir esta estrutura foi a maior limitação da tomografia ainda que com cobertura total.

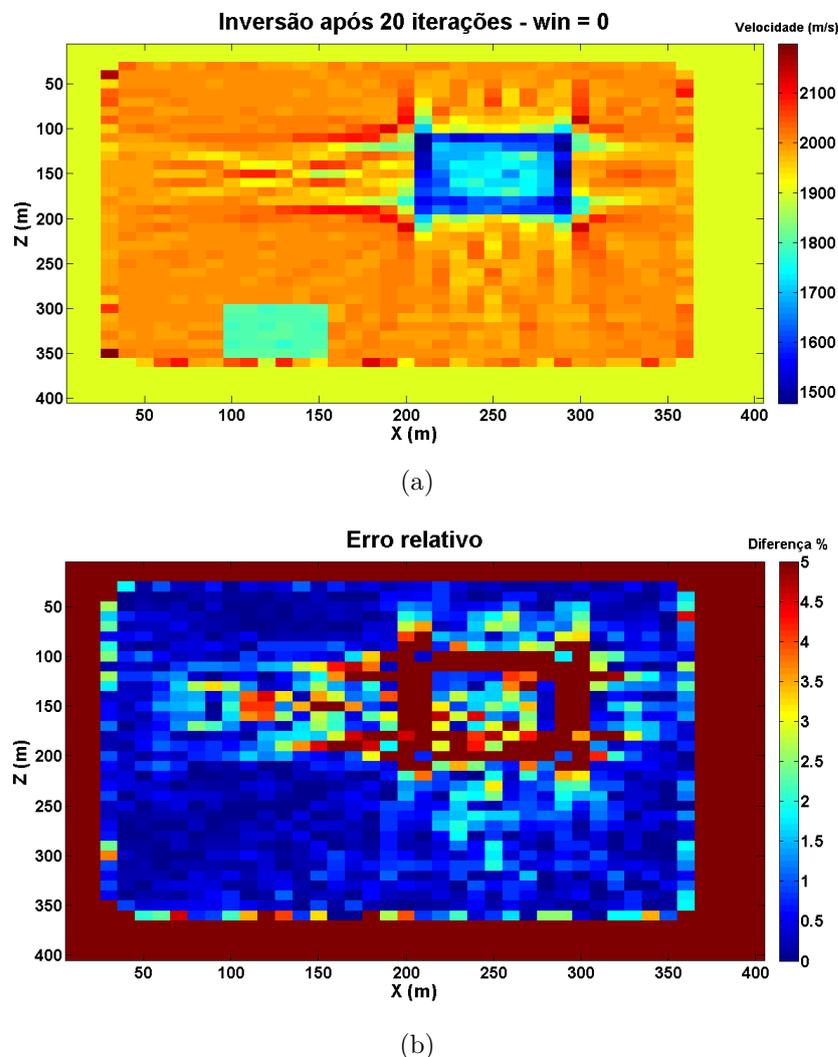


Figura 16 – Tomografia com cobertura total sem tratamento *a posteriori*. (a) Modelo obtido após 20 iterações. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

As regiões de baixa velocidade sempre tem uma cobertura menor (menos raios), já que a energia sísmica propaga-se de maneira a minimizar o tempo de trânsito (princípio

de Fermat). Assim, este é um fator que influenciará o resultado da tomografia, já que se tem menos amostras da região de baixa velocidade. Esse argumento é corroborado ao observar-se que a outra anomalia, apesar de ter uma extensão menor, fica melhor definida e com discrepância em relação ao modelo original com valor similar às regiões homogêneas (Figura 16(b)).

O segundo teste realizado é idêntico ao primeiro, exceto no uso da suavização do modelo obtido após inversão, antes da obtenção da matriz  $G$  no passo seguinte. O valor escolhido para a janela de média móvel foi  $win = 5$ . O resultado está na Figura 17. Nota-se que o resultado final fica mais homogêneo que sem a suavização, o que reduz a discrepância na maior parte do modelo.

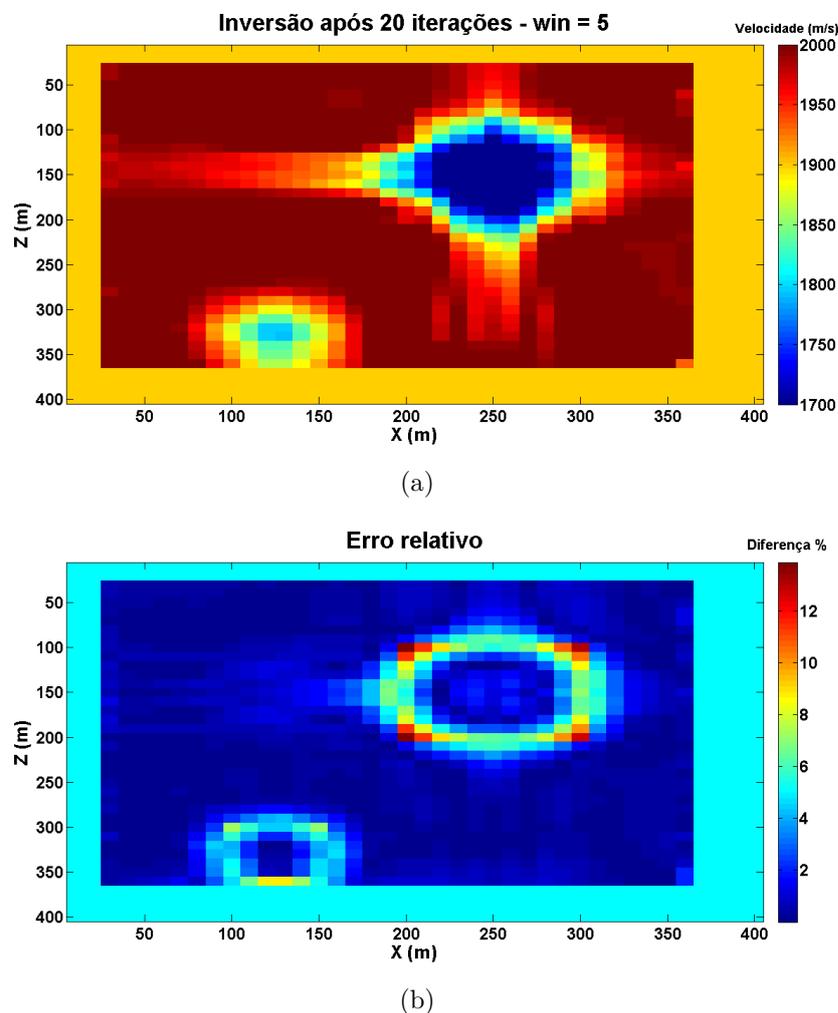


Figura 17 – Tomografia com cobertura total, suavização com  $win = 5$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações com suavização. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

Entretanto, a média móvel torna impossível a perfeita delimitação das interfaces, neste caso presentes devido às anomalias de velocidade. Observa-se que são nas regiões das interfaces das anomalias os maiores valores de discrepância. Além disso, o interior das anomalias tornou-se mais homogêneo, em especial a de mais baixa velocidade, que neste

caso ficou com velocidade mais homogênea, apesar da perda de definição dos seus limites espaciais.

#### 4.1.1.1 Dados com ruído

Os testes com o Modelo 1 foram repetidos exatamente da mesma forma, porém com a adição de ruídos aleatórios aos dados observados. Apesar do valor adicionado de ruído ser muito baixo, o resultado é drasticamente alterado quando  $win = 0$ , como pode ser observado na Figura 18.

Observa-se que a discrepância tem valores muito mais altos do que para os dados sem ruído e não se consegue delimitar nenhuma anomalia ou mesmo a homogeneidade presente na maior parte do modelo original. Ou seja, a tomografia tem um resultado insatisfatório. Este resultado não possibilita nenhuma inferência sobre o modelo original.

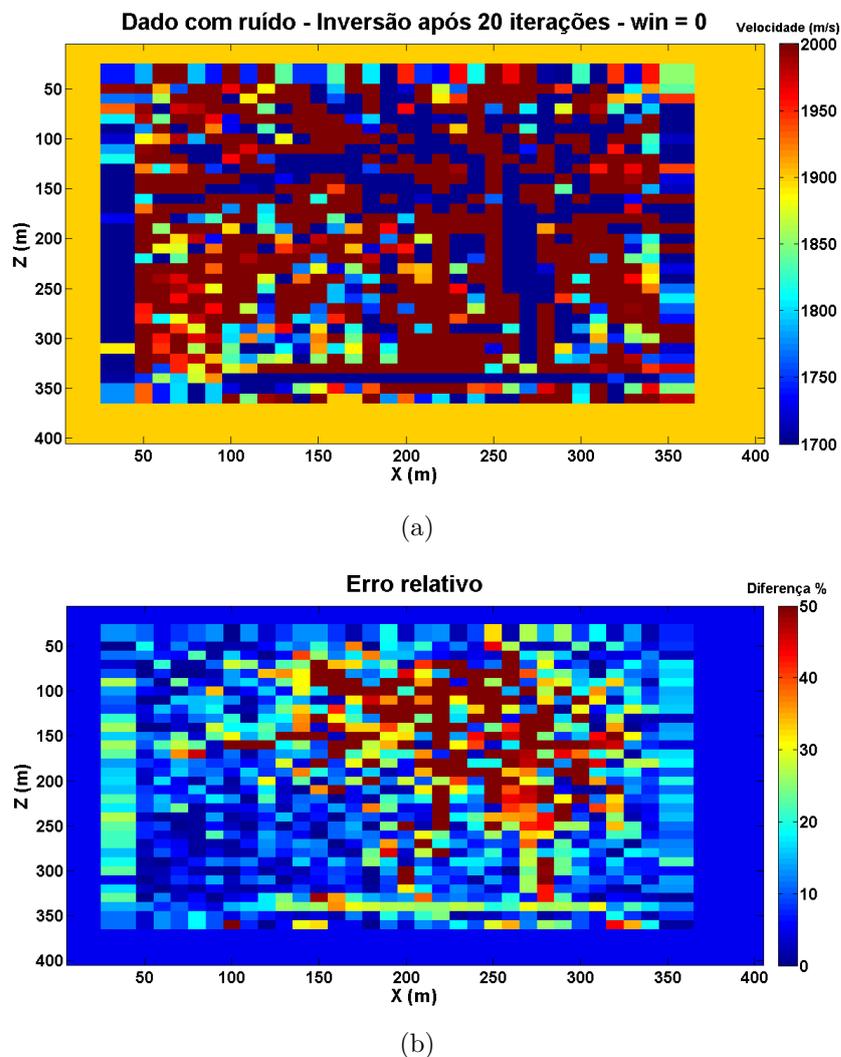


Figura 18 – Tomografia com cobertura total sem suavização para dados com ruído aleatório. (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

Com o uso da suavização,  $win = 5$ , tem-se um resultado satisfatório (Figura 19).

Apesar da perda na delimitação das interfaces, o tratamento *a posteriori* usado permite obter um resultado coerente e com discrepância aceitável. Deste teste infere-se a importância dos tratamentos *a posteriori*, principalmente ao se usar dados com ruído, inerente à dados reais.

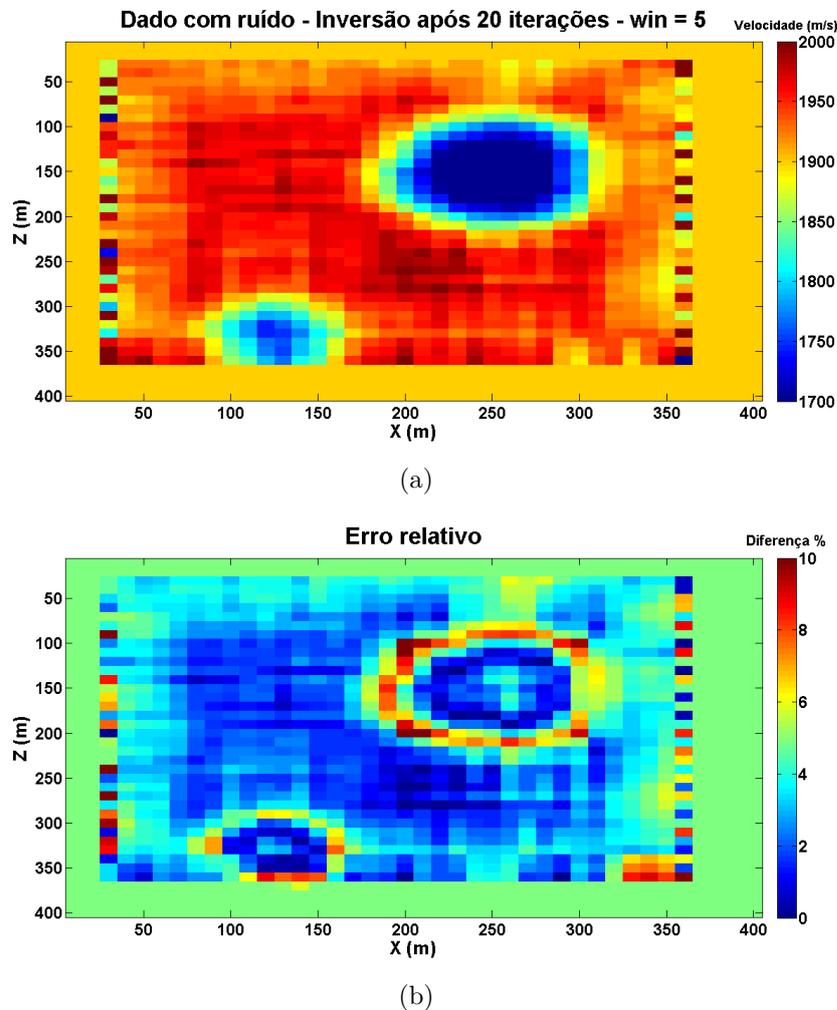


Figura 19 – Tomografia com cobertura total para dados com ruído aleatório, suavização com  $win = 5$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

#### 4.1.2 Modelo 2 - Planos paralelos horizontais

O próximo modelo testado tem mais similaridade com um modelo geológico real. Este consiste em camadas plano paralelas horizontais, sem variação lateral de velocidade para cada coordenada vertical ( $Z$ ). Há 4 camadas principais no modelo, com os valores de velocidade suavizados a fim de não haver variações bruscas de velocidade nas interfaces. Estas observações podem ser feitas na Figura 20.

A geometria de aquisição usada foi a mesma que a usada para o modelo 1, ou seja, cobertura total. Além dos testes com e sem suavização *a posteriori*, também se fez

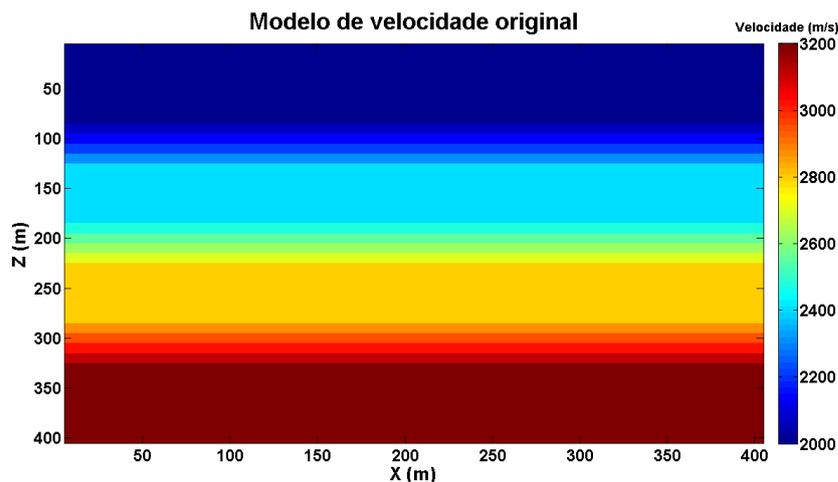


Figura 20 – Modelo de velocidades de camadas plano paralelas horizontais, como gradiente vertical de velocidade.

a comparação de colocar ou não restrições aos valores obtidos pelo Método Gradiente Conjugado (MGC), o que corresponde a introdução de informações *a priori*. A restrição colocada no MGC foi limitar o valor máximo e mínimo de velocidade após cada iteração do MGC. O valor máximo, neste caso, foi  $3000\text{m/s}$  e o valor mínimo  $1500\text{m/s}$ . O modelo inicial usado foi totalmente homogêneo com velocidade de  $1700\text{m/s}$ .

Na Figura 21 está o resultado da tomografia ao não se usar restrições no MGC e  $win = 0$ . Só uma iteração tomográfica foi realizada, ocorrendo erro logo em seguida, devido a não convergência no traçamento de um raio. Ou seja, a ausência de qualquer tratamento *a priori* ou *a posteriori* leva ao surgimento de valores anômalos de velocidade, os quais impedem a execução do algoritmo tomográfico.

Apesar de apenas uma iteração tomográfica feita, nota-se que o resultado tem uma baixa discrepância em relação ao modelo original. Uma limitação que se observa é em relação a delimitação das interfaces, mas como só uma iteração foi feita não se pode inferir nenhuma outra conclusão.

Na Figura 22, o MGC é também usado sem restrições, mas há a suavização do modelo em cada iteração tomográfica. Após 9 iterações tomográficas obtem-se uma solução satisfatória para a tomografia. A discrepância fica em torno de 1% na maior parte do modelo invertido, o que confirma a excelência do resultado. Os valores de discrepância maiores são observados exatamente nas profundidades ( $Z$ ) onde há o início de uma nova camada. Como antes, isso é o esperado, uma vez que o modelo é suavizado através de uma média móvel.

Na Figura 23 está o resultado da tomografia ao se usar restrições no MGC e  $win = 0$ . Neste caso, houve 3 iterações antes do traçamento de raios apresentar problema, com a conseqüente interrupção do algoritmo tomográfico. O resultado da inversão é similar

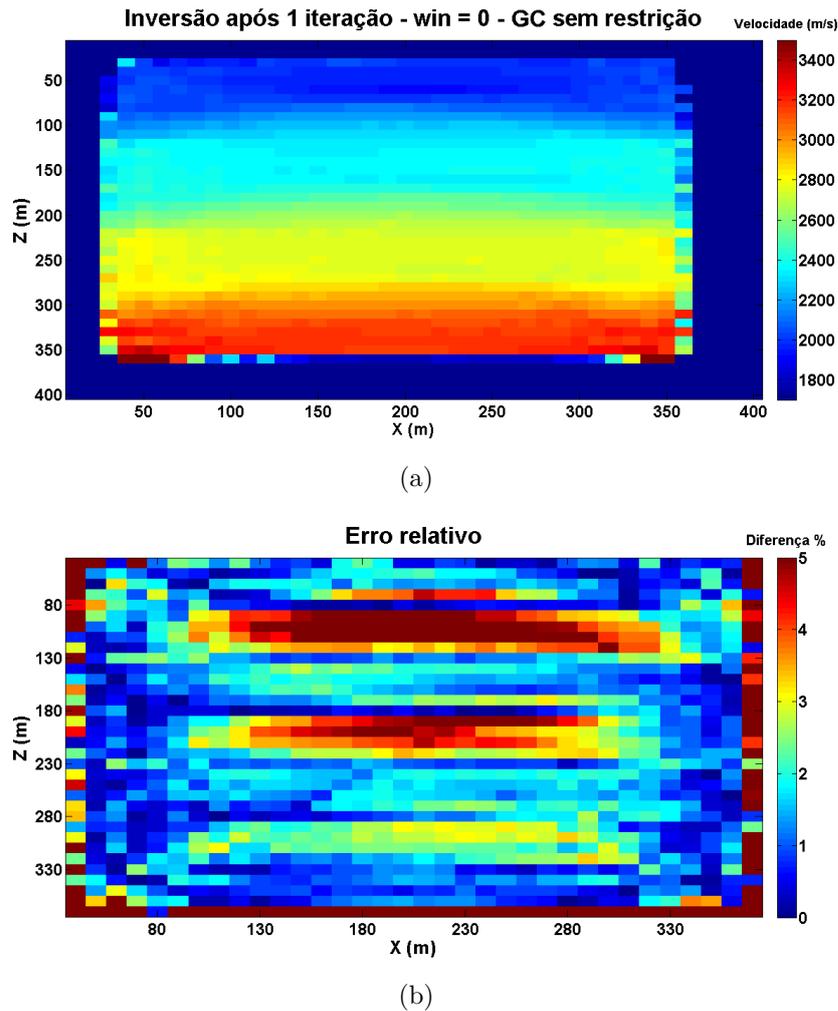


Figura 21 – Tomografia com cobertura total sem tratamento *a posteriori* e sem restrições no GC. (a) Modelo obtido após 3 iterações. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

ao MGC sem restrições e  $win = 0$  e assim como neste último, poucas iterações tomográficas foram realizadas. Novamente, tem-se um resultado satisfatório para a tomografia, mas que pode ser melhorado.

Por fim, na Figura 24 tem-se o resultado ao utilizar-se restrição no MGC e  $win = 5$ . O resultado é similar ao obtido sem restrição no MGC, mas observa-se que uma iteração tomográfica a menos foi realizada. Logo, usar restrições no MGC pode aumentar a eficiência da tomografia assim como a suavização *a posteriori* também se mostra importante. Ressalta-se que nestes testes a cobertura é total e já se faz necessário o uso de tratamentos *a priori* e *a posteriori*.

#### 4.1.2.1 Regularização de Tikhonov

A fim de verificar o funcionamento da regularização de Tikhonov, foi testada a regularização de primeira ordem para os dados o modelo desta seção. A suavização de primeira derivada foi considerada somente na direção horizontal na matriz regularizante,

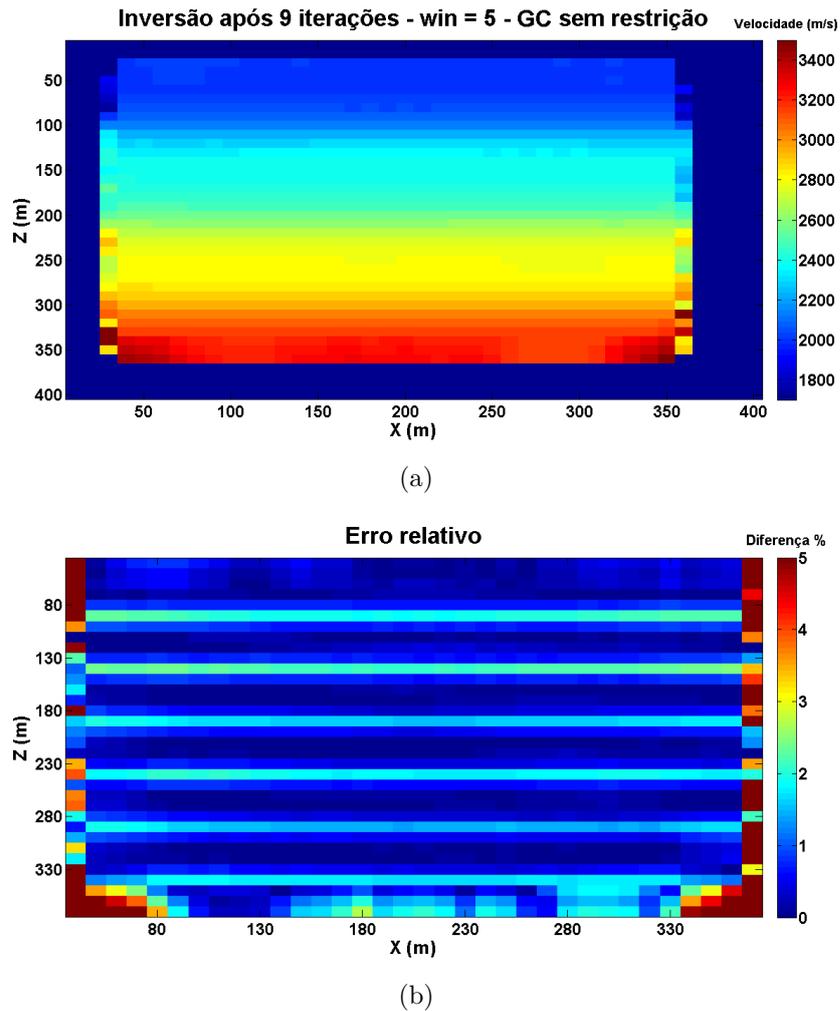


Figura 22 – Tomografia com cobertura total, suavização com  $win = 5$ , mas sem restrições no GC. (a) Modelo obtido após 9 iterações com suavização. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

o que pode ser considerado como introdução de informação *a priori*. Todos os outros parâmetros foram mantidos idênticos aos da seção anterior.

Na Figura 25 está o resultado da tomografia com a regularização de Tikhonov de primeira ordem, mas sem a suavização por média móvel. Percebe-se que o resultado obtido tem discrepância aceitável, apesar de não definir tão bem as interfaces entre as camadas. Nota-se também que a regularização é capaz de garantir a estabilidade da inversão tomográfica, uma vez que a não suavização do modelo invertido em cada iteração tomográfica não impediu a execução da tomografia.

Na Figura 26, usa-se a mesma regularização (fator de regularização  $\lambda$  com o mesmo valor) e a suavização com  $win = 5$ . O resultado novamente indica a importância da suavização com a média móvel, haja visto a melhora na definição das camadas.

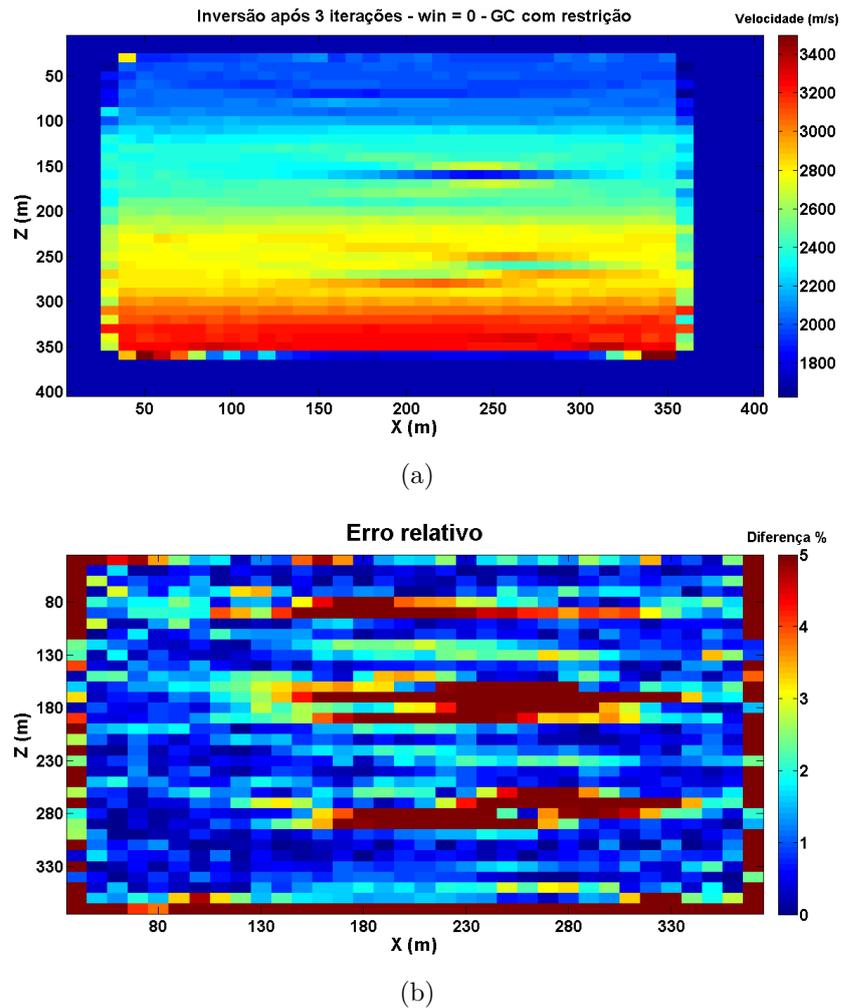


Figura 23 – Tomografia com cobertura total sem tratamento *a posteriori*, mas com restrições no GC. (a) Modelo obtido após 3 iterações. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

#### 4.1.2.2 Regularização de Tikhonov - Dados com ruído

O último teste de validação foi o uso da regularização de Tikhonov para os dados com ruído aleatório. Testou-se o resultado da tomografia com e sem a regularização de Tikhonov, mas em ambos a suavização por média móvel foi usada. Na Figura 27 está o resultado sem a regularização. A presença de três camadas fica evidente, mas a quarta camada não fica bem definida no resultado da tomografia sem a regularização.

Outro aspecto de não se ter regularização foi a limitação no número de iterações tomográficas. Houve erro após a 5ª iteração tomográfica, com a interrupção do algoritmo.

Na Figura 28, pode-se observar no resultado da tomografia com a regularização de Tikhonov que se define as quatro camadas presente no modelo original. Dessa forma, a importância da regularização durante a inversão para dados com ruído (ainda que pequeno) fica ilustrada.

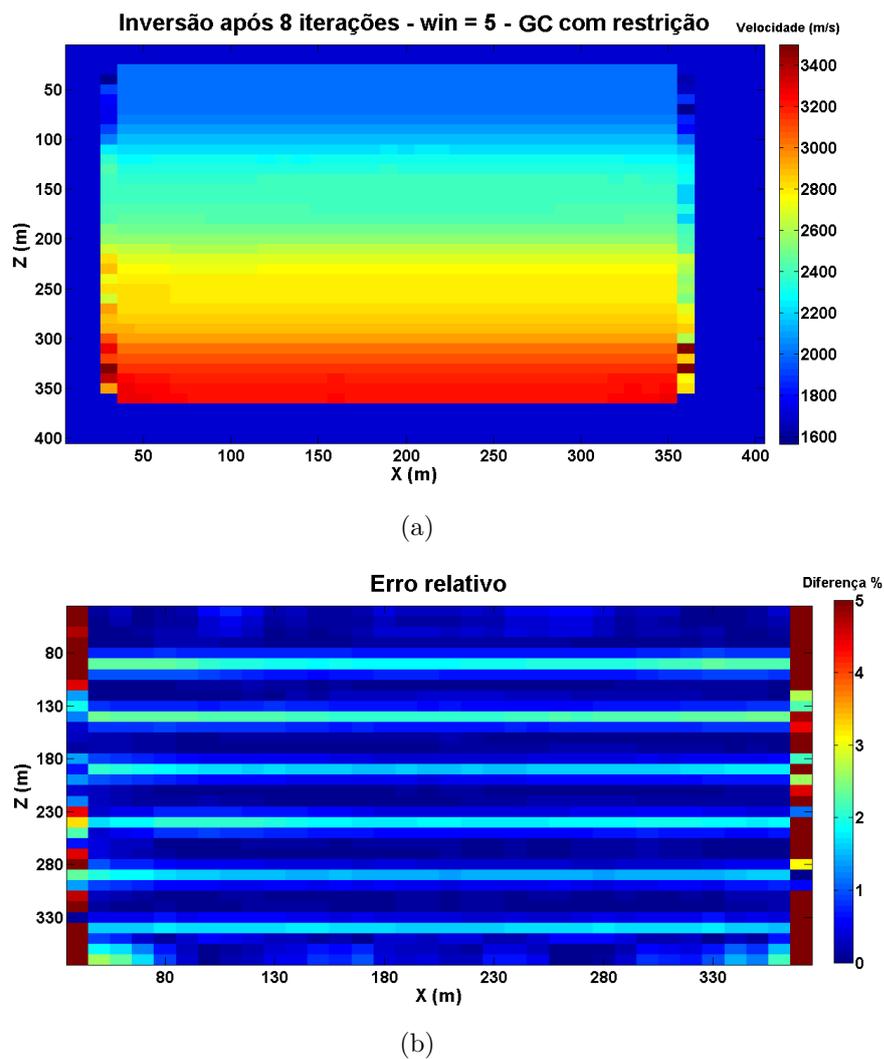


Figura 24 – Tomografia com cobertura total, suavização com  $win = 5$  e com restrições no GC. (a) Modelo obtido após 8 iterações com suavização. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

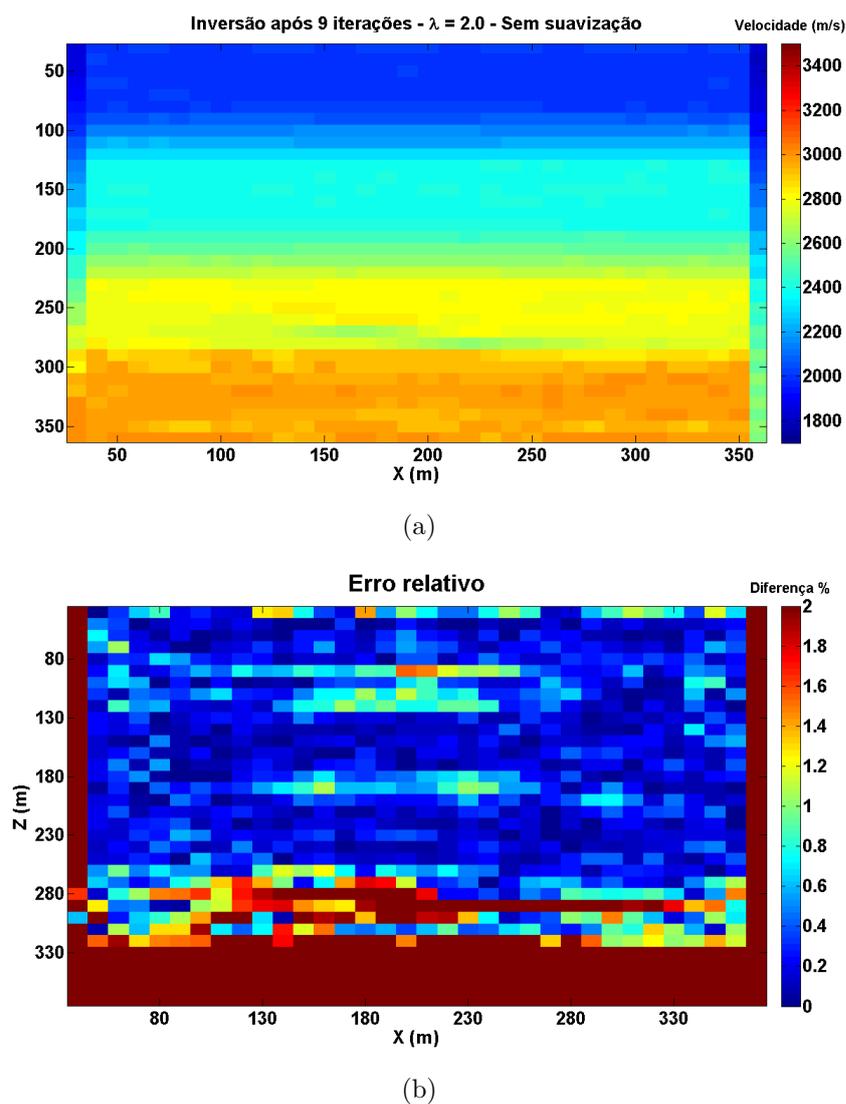
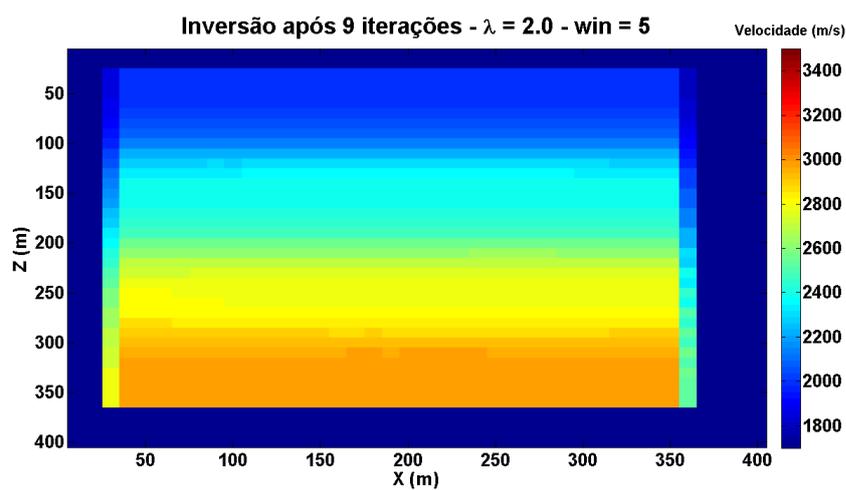
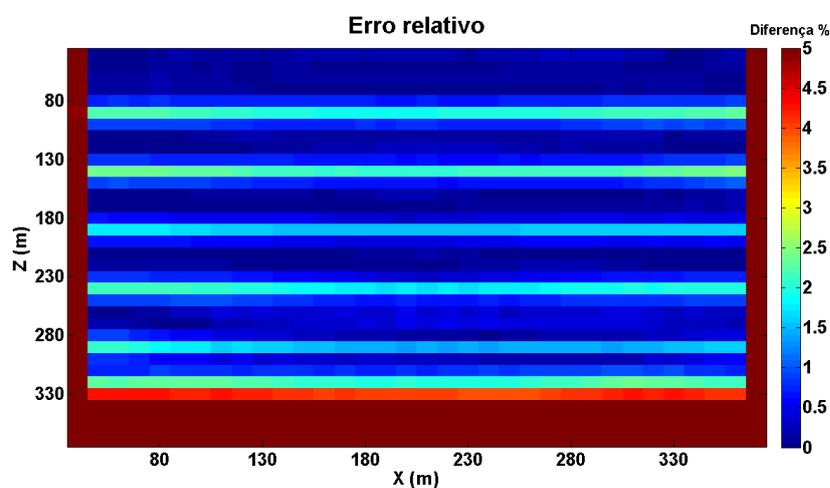


Figura 25 – Tomografia com regularização de Tikhonov de primeira ordem,  $\lambda = 2, 0$ , sem suavização. (a) Modelo obtido após 9 iterações. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.



(a)



(b)

Figura 26 – Tomografia com regularização de Tikhonov de primeira ordem,  $\lambda = 2,0$ , e suavização,  $win = 5,0$ . (a) Modelo obtido após 9 iterações. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

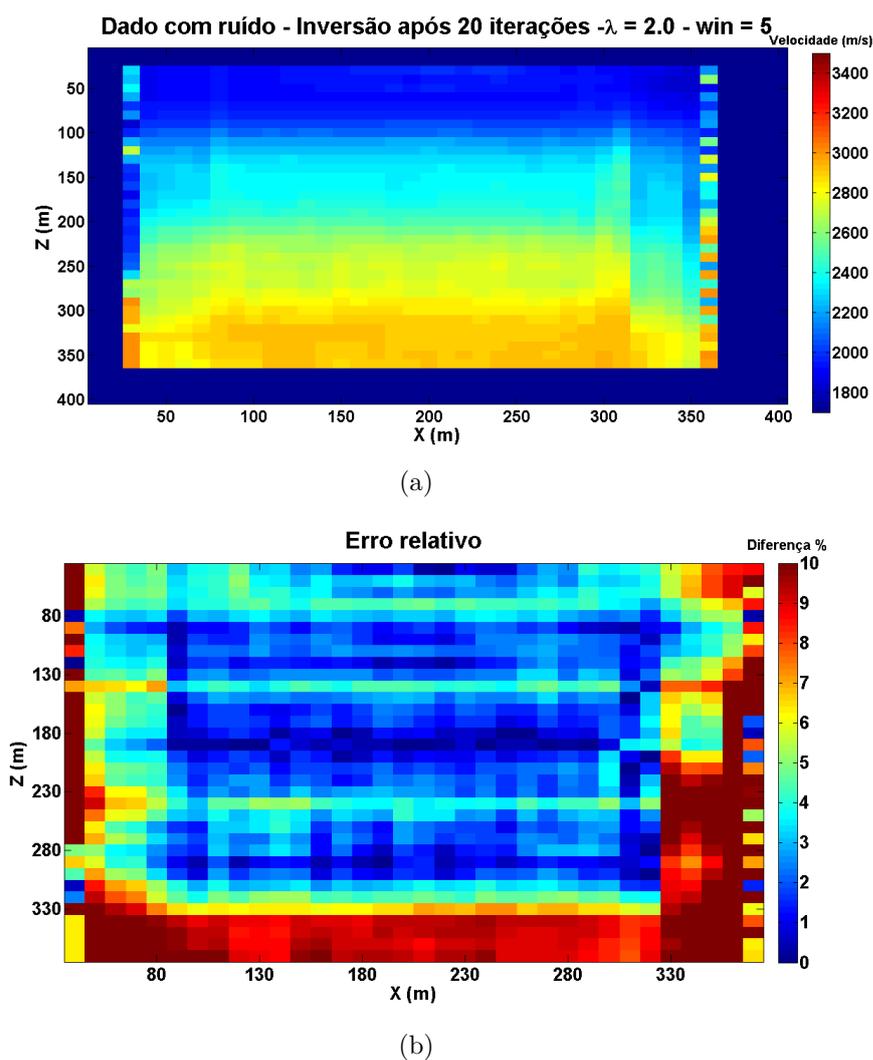
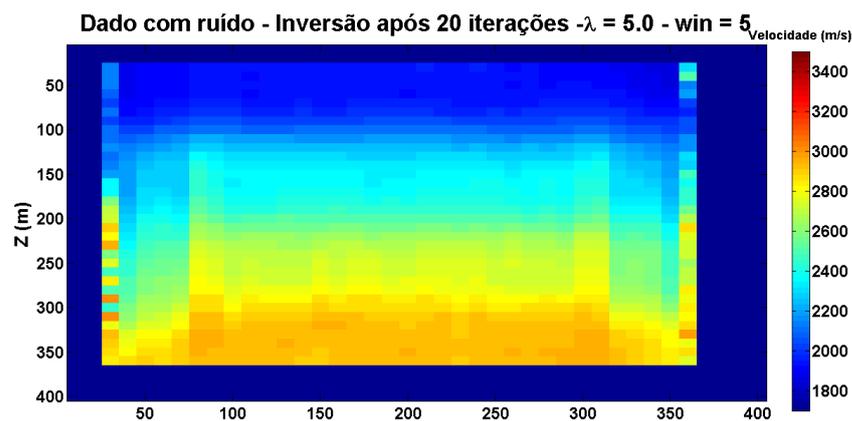
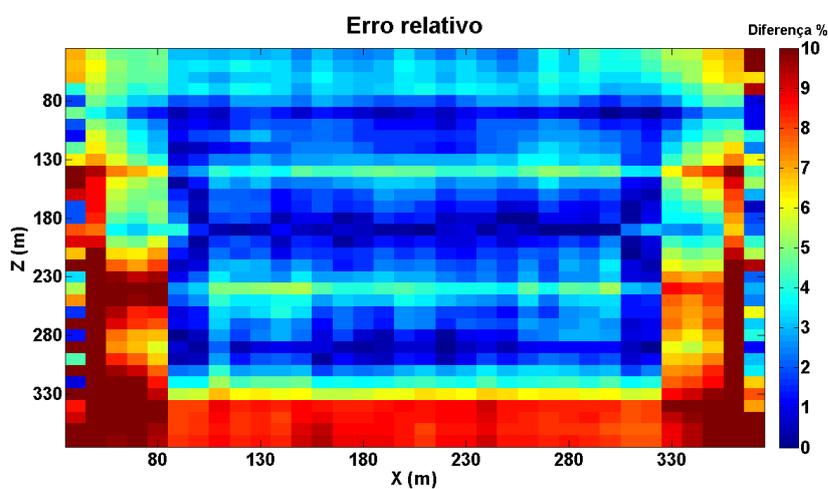


Figura 27 – Tomografia para dados com ruído, com regularização de Tikhonov de primeira ordem,  $\lambda = 2,0$ , e suavização,  $win = 5$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.



(a)



(b)

Figura 28 – Tomografia para dados com ruído, com regularização de Tikhonov de primeira ordem,  $\lambda = 5,0$ , e suavização,  $win = 5$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

## 4.2 Tomografia de refração

A tomografia de refração consiste no uso dos tempos das primeiras chegadas (*first breaks*) quando os receptores e as fontes estão na superfície. Ou seja, tem relação direta com a geometria de aquisição superfície-superfície. Como descrito na seção 2.4, a tomografia de refração apresenta dificuldades que podem impedir seu uso satisfatoriamente.

Para entender as limitações e resultados possíveis pela tomografia de refração diversos testes foram feitos. Foram feitos testes com variação na geometria de aquisição, mudança do modelo inicial para o algoritmo tomográfico e regularização de Tikhonov (primeira e segunda ordem).

### 4.2.1 Modelo 1

O modelo 1 consiste em três camadas plano paralelas horizontais com velocidades entre  $1500m/s$  e  $2000m/s$ , com a velocidade variando suavemente nas interfaces. Não há variação lateral de velocidade, ou seja, cada coordenada vertical tem o mesmo valor de velocidade para todas as coordenadas horizontais.

A dimensão horizontal do modelo é  $2500m$  e a vertical  $250m$ , sendo a discretização das células de  $10m$ , o que resulta em um total de 6250 parâmetros para o modelo. O tamanho horizontal foi escolhido muito maior que o vertical visto que o interesse são as ondas refratadas.

A Figura 29 ilustra o modelo considerado e também a primeira geometria de aquisição considerada. São 150 receptores (à direita da fonte) com espaçamento de  $10m$ , sendo a distância da fonte ao primeiro receptor igual à  $500m$ ; o espaçamento entre cada tiro foi de  $40m$ ; tem-se um total de 12 tiros.

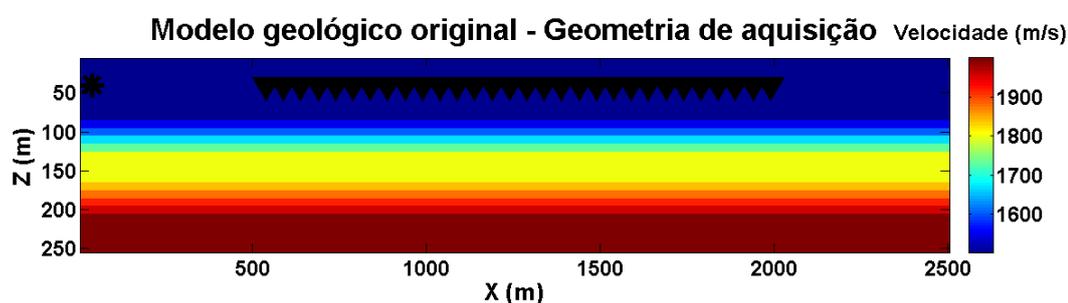


Figura 29 – Modelo de velocidades original usado na tomografia de refração e geometria de aquisição. A profundidade do conjunto fonte - receptores é fixa (40 metros em relação ao limite horizontal superior).

O resultado da primeira tentativa está na Figura 30. O principal problema neste teste foi a escolha errada da região em que se deveria aplicar a suavização por média móvel. Neste caso, não aplicou-se a média em uma região que possuía cobertura pela trajetória dos raios e onde portanto havia inversão tomográfica dos parâmetros. A consequência

disso foram resultados incoerentes na região em que não houve a suavização, sendo este problema mais evidente para  $X$  menor que  $500m$ , região coberta pelos raios com menor tempo de percurso. Como o traçamento dos raios é influenciado por esse problema, essa falha compromete o resultado da tomografia em todo o restante do modelo.

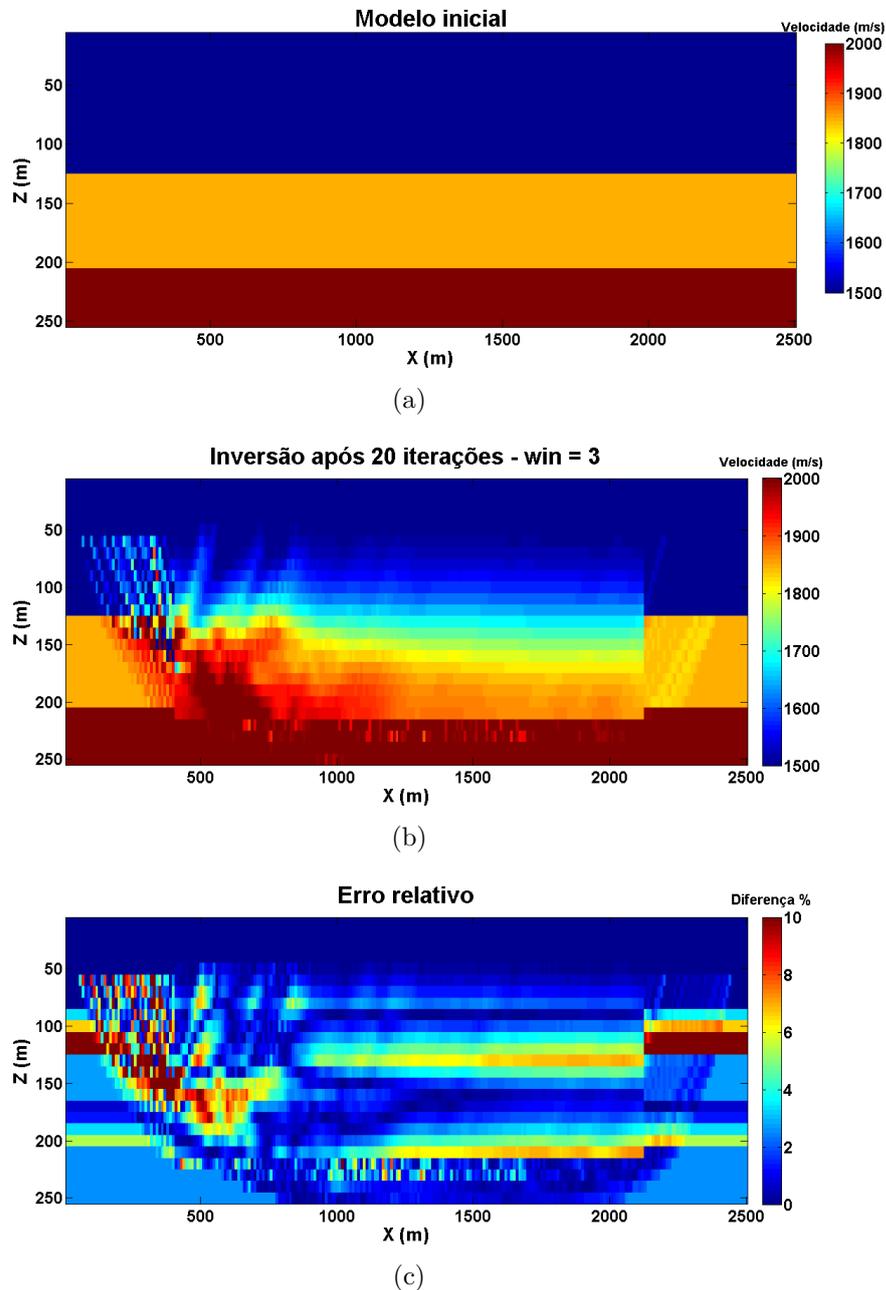


Figura 30 – Tentativa mal sucedida de tomografia de refração. Observa-se que a suavização não foi aplicada em toda a região com cobertura. (a) Modelo inicial usado para a tomografia. (b) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (c) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

Na Figura 31, está o resultado com a aplicação da suavização em toda a região do modelo onde há passagem de raios. Nota-se que o modelo obtido é mais coerente, apesar da discrepância em relação ao modelo original não ter melhorado significativamente. Entretanto, tem-se novamente que a região com menor discrepância fica onde passam os

raios com menor tempo de percurso, mais próximos às fontes. A partir desta figura, a apresentação do erro relativo é feita apenas na região em que há inversão, ou seja, onde há cobertura dos raios e usa-se a suavização. Esta região pode ser identificada em todas as figuras, visto que fora dela não há alteração em relação ao modelo inicial usado.

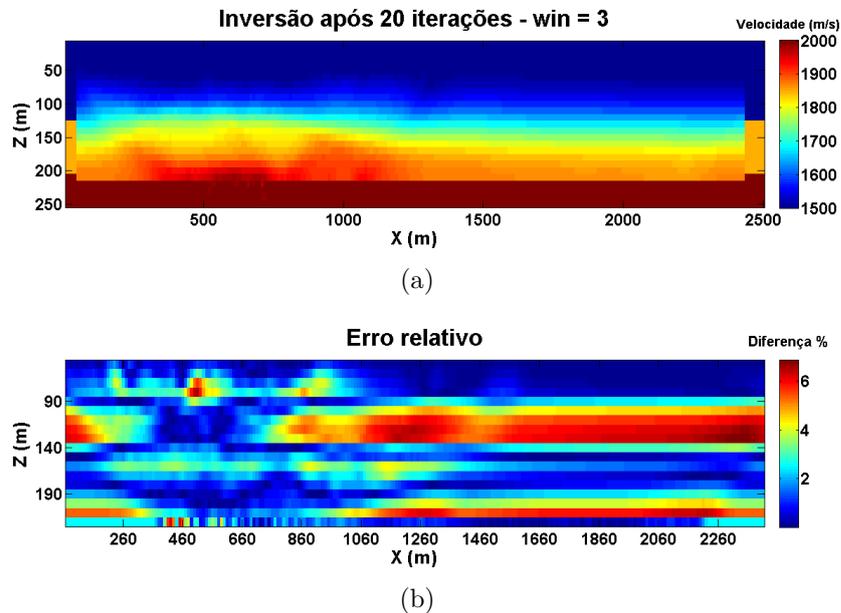


Figura 31 – Tomografia de refração com a suavização aplicada em toda a região com cobertura. (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (c) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

#### 4.2.1.1 Cobertura com mais tiros

Haja visto a observação de que aparentemente os receptores mais próximos a fonte são responsáveis pela melhora no resultado da tomografia, fez-se um teste com redução no espaçamento entre os tiros. Neste, o espaçamento entre cada tiro é de  $10m$ , num total de 88 tiros. O resultado está na Figura 32.

Da Figura 32 nota-se que a discrepância tem um valor menor que para a geometria anterior. Além disso, essa melhora nos resultados é percebida nas áreas próximas as fontes, aparentemente confirmando a hipótese de que os raios referentes aos receptores mais próximos das fontes são os responsáveis pela maior acurácia.

Outra geometria usada foi considerar um total de 176 tiros: 88 tiros, conforme a geometria anterior; mais 88 tiros com as mesmas distâncias, porém com os receptores à esquerda da fonte, ou seja, como uma imagem especular. Dessa forma, obtem-se cobertura para receptores mais próximos as fontes em ambos os lados do modelo.

O resultado está na Figura 33. Este corrobora mais uma vez a hipótese de que os tempos de trânsito associados a raios com menor distância percorrida fornecem os resultados com maior acurácia. Nota-se que os valores de discrepância são menores em

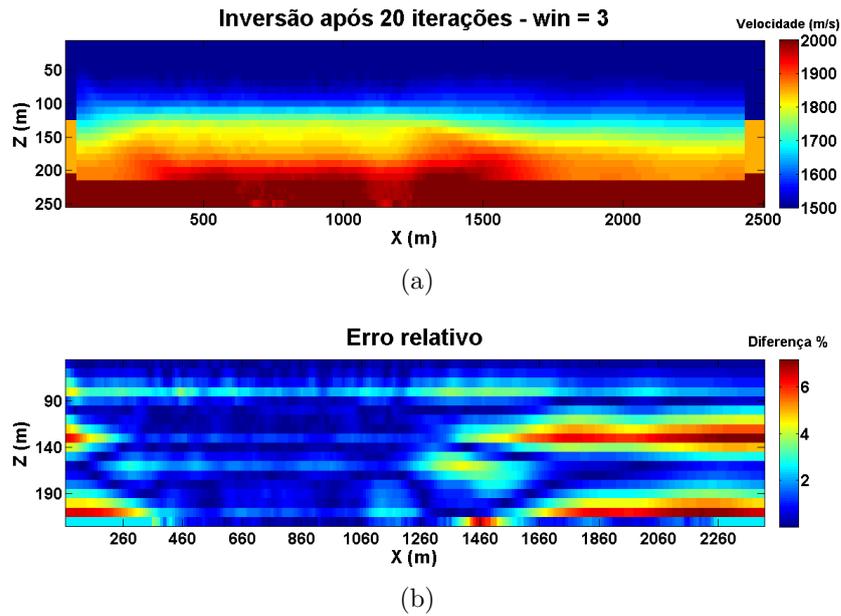


Figura 32 – Tomografia de refração para aquisição com espaçamento mínimo entre cada tiro, num total de 88 tiros. (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

toda a região onde há cobertura. Esta observação de que os receptores com distâncias mais curtas propiciam uma maior acurácia é feita no trabalho de Stefani (1995).

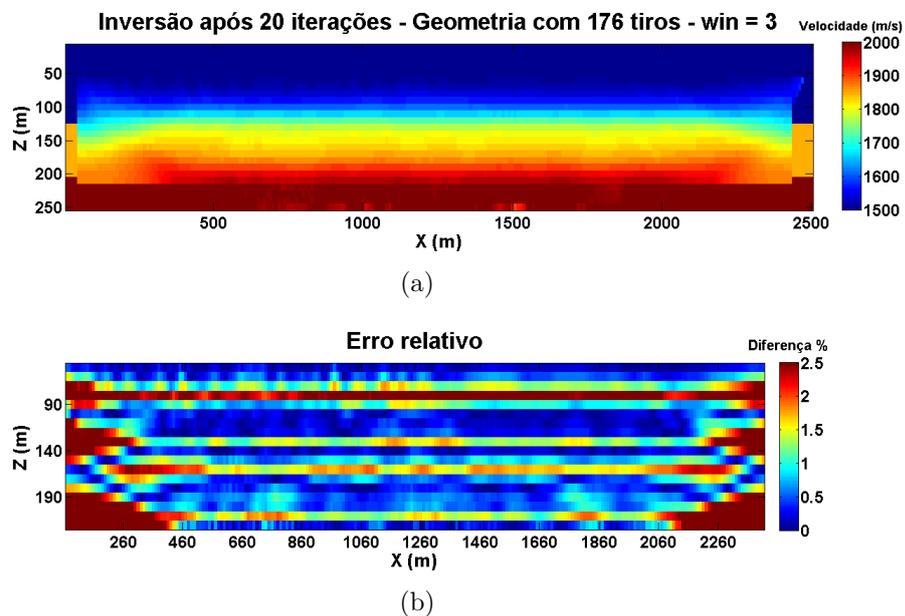


Figura 33 – Tomografia de refração para aquisição com espaçamento mínimo entre cada tiro, num total de 176 tiros. (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

#### 4.2.1.2 Modelo inicial 2

Outro teste realizado foi a mudança do modelo inicial para a tomografia. O novo modelo usado apresenta as interfaces do modelo original, porém o posicionamento vertical

das mesmas e os valores de velocidade são diferentes do modelo original. A geometria de aquisição usada considerou apenas 12 tiros. Este modelo foi usado apenas nesta seção, sendo o modelo inicial anterior usado em todos os outros testes.

Comparando-se a Figura 34 (novo modelo inicial testado) com a Figura 31, nota-se uma melhora no resultado final. Essa melhora é consequência do uso de um modelo inicial mais próximo ao modelo original. Observa-se entretanto, que mesmo essa melhora não supera a obtida com o aumento na quantidade de tiros, conforme mostrado no teste anterior.

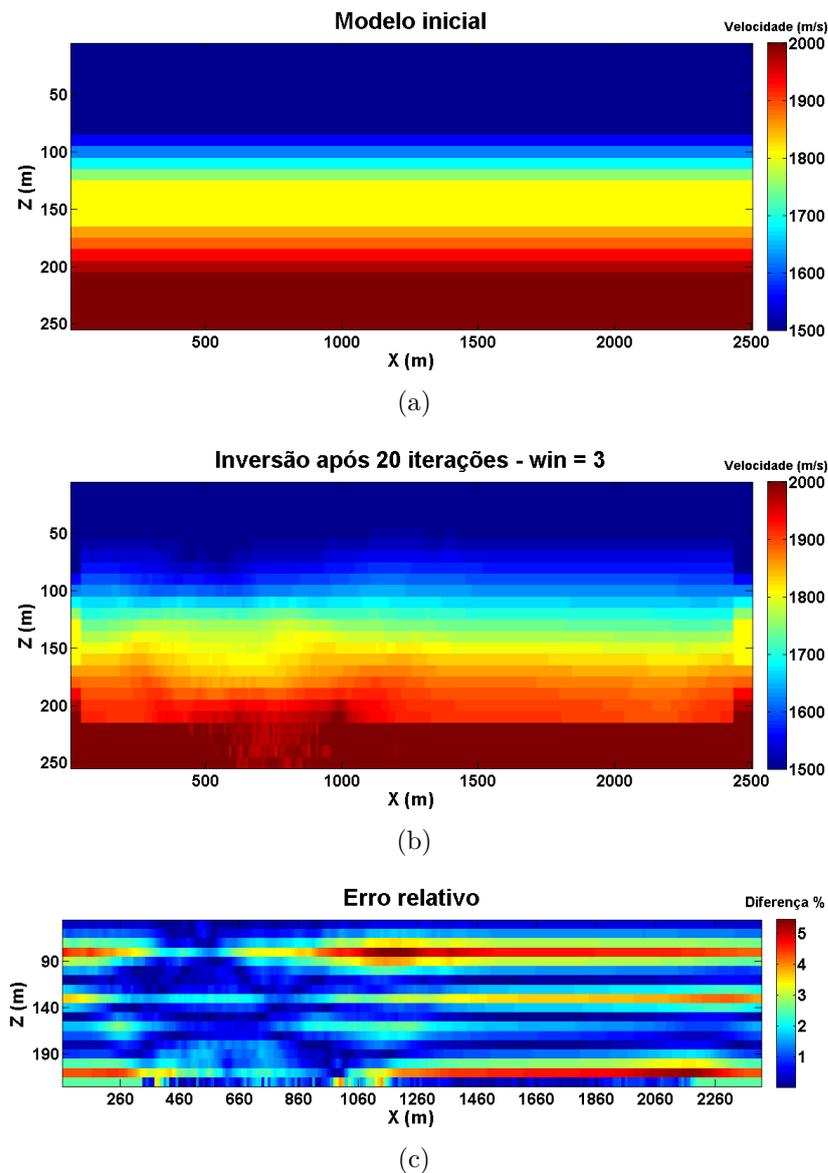


Figura 34 – Tomografia de refração com outro modelo inicial e 12 tiros. (a) Modelo inicial usado para a tomografia. (b) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (c) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

### 4.2.1.3 Regularização de Tikhonov

Tendo em vista a dificuldade inerente da tomografia de refração, usar regularização pode levar a resultados melhores. Fez-se testes principalmente com a regularização de primeira ordem, com variação do parâmetro de regularização, além do uso das duas geometrias já usadas (com 12 e 88 tiros cada uma). Além disso, a suavização por média móvel foi usada em todos os testes.

Na Figura 35 está o resultado com o parâmetro de regularização  $\lambda = 5,0$  e com a geometria de aquisição para 12 tiros. Nota-se a melhoria no resultado, ao compará-lo com o obtido sem regularização, Figura 31. Outra observação é quanto ao aumento da homogeneidade do resultado da tomografia, resultado esperado ao se usar a regularização de Tikhonov.

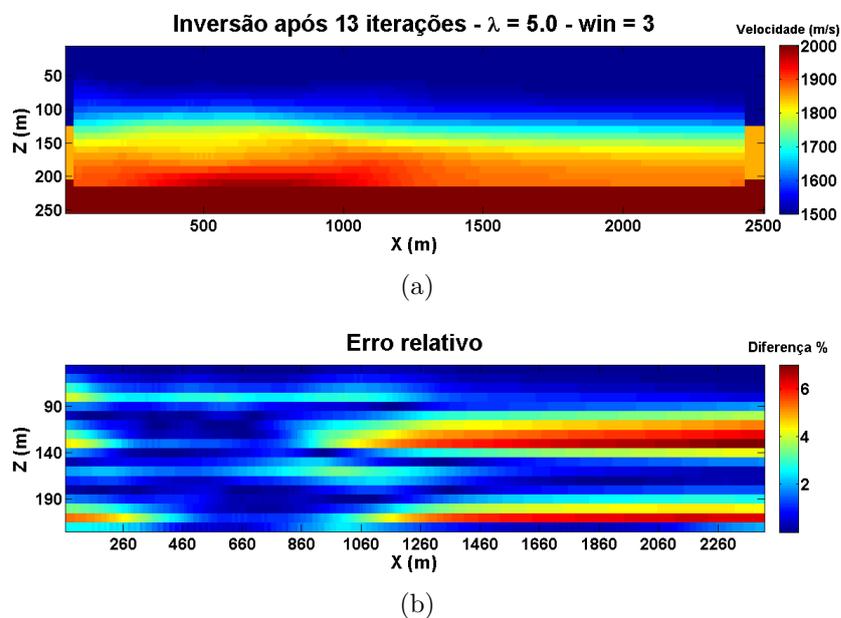


Figura 35 – Tomografia de refração para aquisição com total de 12 tiros,  $\lambda = 5,0$  e suavização,  $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 12 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

Na Figura 36, tem-se o resultado com parâmetro de regularização  $\lambda = 20,0$ , valor maior que no primeiro teste. Há novamente melhoria do resultado, confirmado inclusive pela diminuição da discrepância em relação ao modelo original.

Por fim, testou-se um valor muito maior do parâmetro de regularização,  $\lambda = 100,0$ , Figura 37. Há uma melhoria em relação ao teste anterior, mas esta não é significativa. Pode-se observar que os resultados são similares, com as maiores discrepâncias nas mesmas regiões.

Outro teste é o uso da regularização na geometria com 88 tiros. Nesta usou-se o parâmetro de regularização  $\lambda = 20,0$  e o resultado está na Figura 38. A melhora dos resultados ocorre conforme os outros testes. Entretanto, a região com menor discrepância

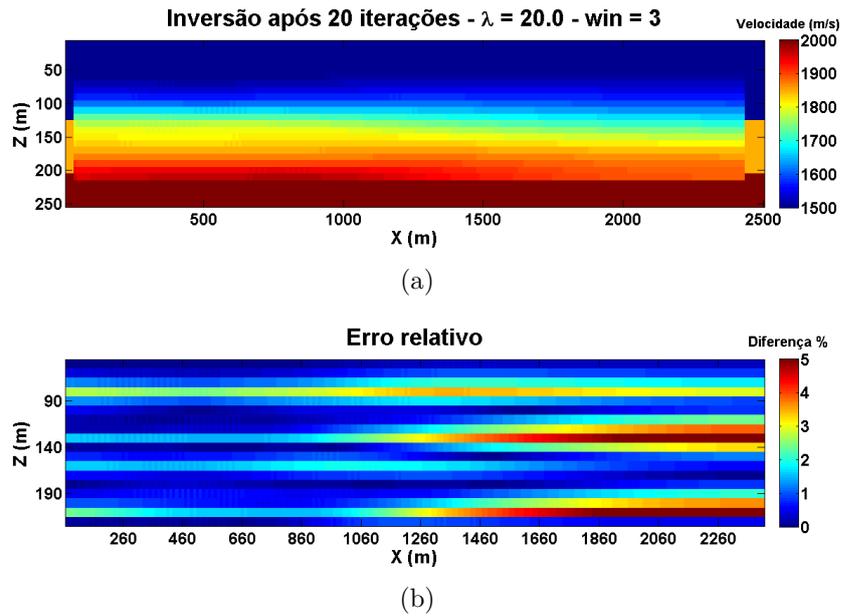


Figura 36 – Tomografia de refração para aquisição com total de 12 tiros,  $\lambda = 20,0$  e suavização,  $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

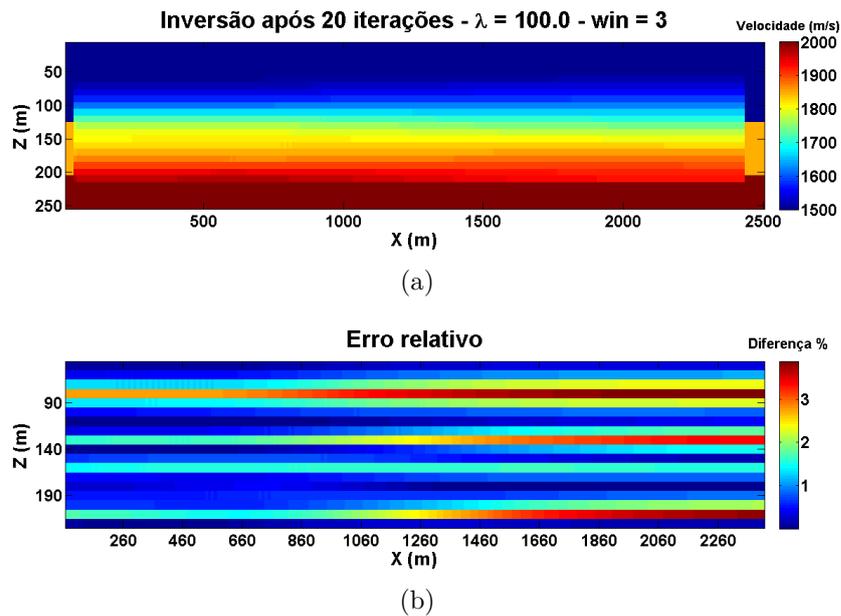


Figura 37 – Tomografia de refração para aquisição com total de 12 tiros,  $\lambda = 100,0$  e suavização,  $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

em relação ao modelo original é maior, uma vez que apenas o uso de mais tiros resulta em melhoria no resultado da tomografia.

Em geral, ao se falar de regularização de Tikhonov de primeira ordem refere-se apenas como sendo o uso da matriz correspondente a derivada primeira como matriz regularizante. Entretanto, há diferentes esquemas para a discretização da derivada primeira. Neste trabalho usou-se o esquema de diferenças centradas, mas se realizou um teste para

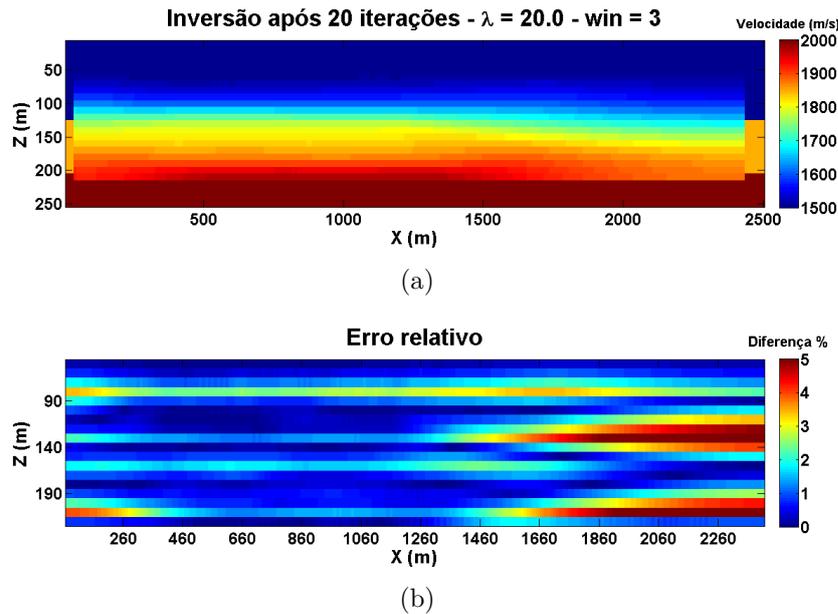


Figura 38 – Tomografia de refração para aquisição com espaçamento mínimo entre cada tiro (total de 88 tiros),  $\lambda = 20,0$  e suavização,  $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

verificar o impacto desta escolha no resultado da inversão.

Na Figura 39 está o resultado da tomografia com a regularização de Tikhonov de primeira ordem com a matriz no esquema adiantado (*forward scheme*). A geometria de aquisição usada é a correspondente a 88 tiros. O resultado é muito similar ao usar o esquema de diferença centrada, contudo uma análise mais datalhada mostra que há presença de maiores valores de discrepâncias com este esquema. Essa piora do resultado é mais evidente próximo a  $X = 260m$  e  $X = 1460m$ , conforme se observa na Figura 39 (b).

O último teste realizado foi o uso da regularização de Tikhonov de segunda ordem, que corresponde ao uso da matriz derivada segunda como matriz regularizante. O resultado desta tomografia está na Figura 40. Comparada a regularização de primeira ordem, há piora no resultado. Isso mostra que esta regularização, ao menos no caso do modelo original usado, não tem melhor resultado que a regularização de primeira ordem. Entretanto, este resultado tem melhor acurácia do que o não uso de regularização.

## 4.2.2 Modelo 2

O modelo 2 é formado por três camadas com velocidades entre  $1500m/s$  e  $2500m/s$ , com as camadas plano paralelas horizontais em quase toda a extensão do modelo, apenas com uma depressão das camadas na região central.

As dimensões do modelo e sua discretização são idênticas às do modelo 1. A geometria de aquisição usada também é a mesma usada no modelo 1, porém para o modelo 2 usou-se apenas a configuração com 176 tiros visto que oferece melhor resultado. Na

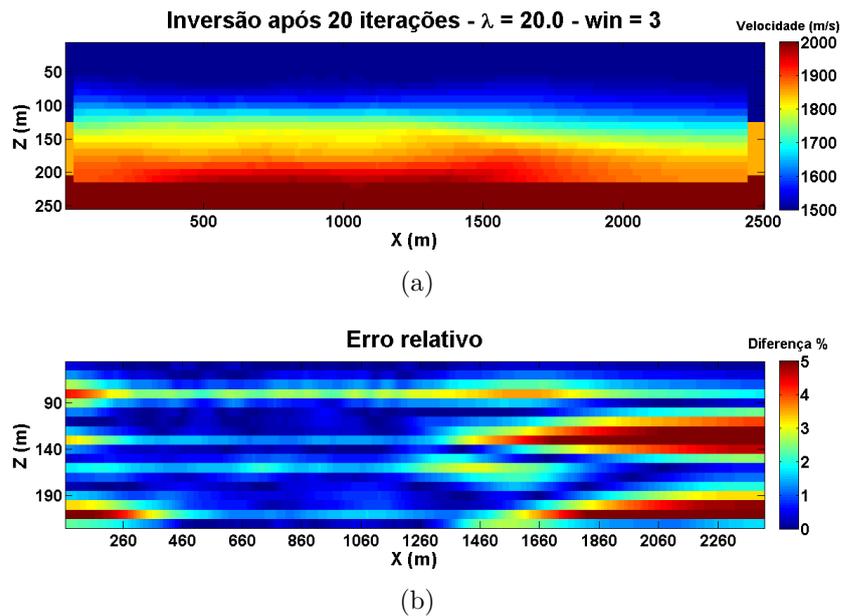


Figura 39 – Tomografia de refração para aquisição com espaçamento mínimo entre cada tiro (total de 88 tiros),  $\lambda = 20,0$  e suavização,  $win = 3$ . A matriz regularizante, derivada primeira foi considerada num esquema adiantado (*forward scheme*) ao invés de diferença centrada (*centered difference*), usado em todos os outros testes. (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

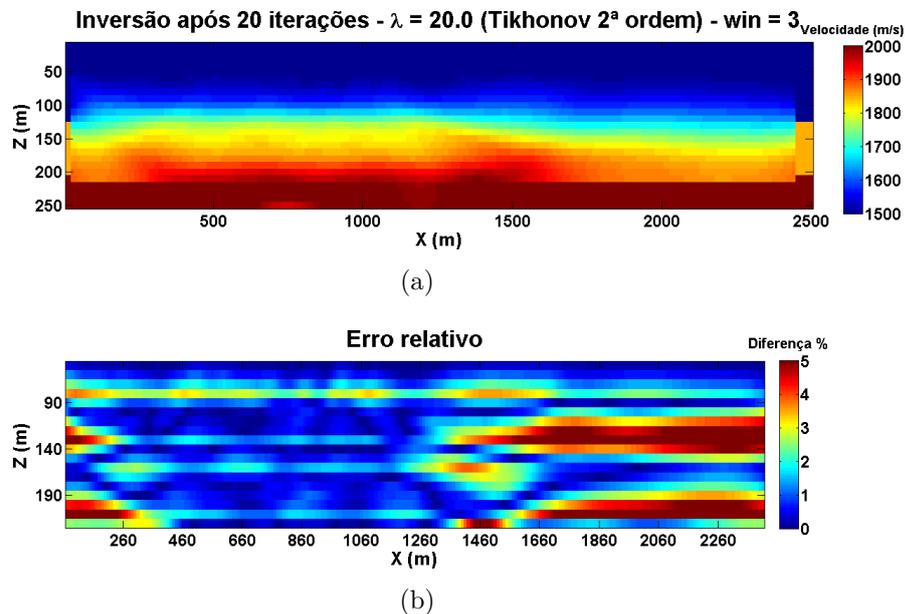


Figura 40 – Tomografia com regularização de Tikhonov de ordem 2 para aquisição com espaçamento mínimo entre cada tiro (total de 88 tiros),  $\lambda = 20,0$  e suavização,  $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

Figura 41 está ilustrado o modelo 2.

O primeiro teste foi a tomografia sem regularização, apenas com a suavização por média móvel. O resultado está na Figura 42. Observa-se que a tomografia apresenta um resultado que mostra mais detalhes sobre a geologia que o modelo inicial, apesar de não

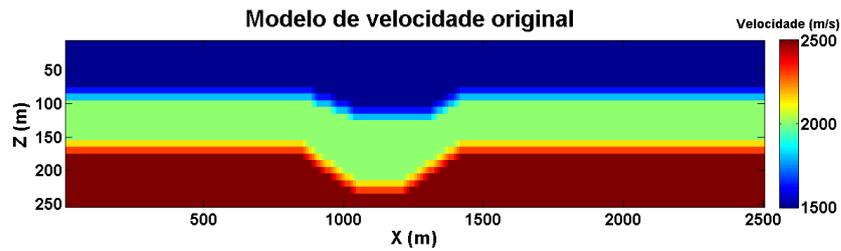


Figura 41 – Modelo de velocidades original (modelo 2) usado na tomografia de refração.

conseguir definir bem os limites das camadas.

Nota-se que a região à direita da depressão presente no modelo original apresentou as maiores discrepâncias em relação ao modelo original, assim como a área da depressão. A maior discrepância nessa região é influenciada pela área da depressão que altera a cobertura. Isso não ocorre de maneira simétrica em torno da depressão, já que esta não é simétrica no modelo original.

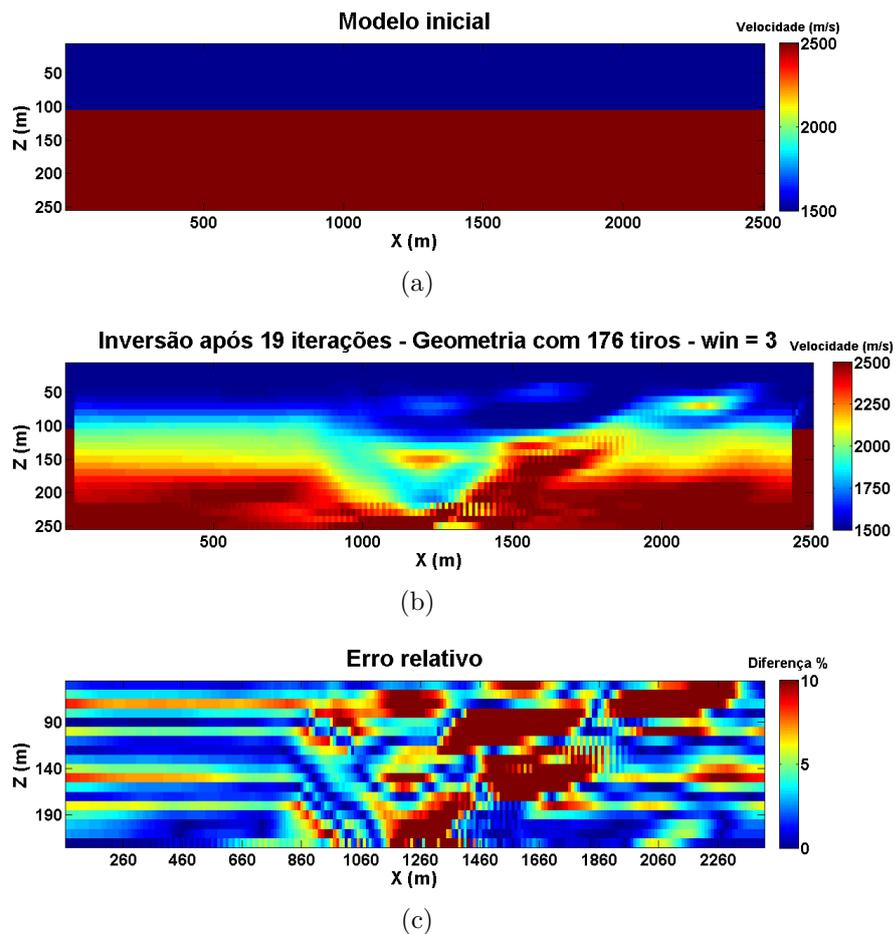


Figura 42 – Tomografia sem qualquer regularização,  $win = 3$ . (a) Modelo inicial para a tomografia. (b) Modelo obtido após 19 iterações tomográficas. (c) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

### 4.2.2.1 Regularização de Tikhonov

A fim de tentar obter melhores resultados, usou-se a regularização de Tikhonov de primeira ordem. O modelo inicial usado foi o mesmo que para a tomografia sem a regularização. O primeiro valor testado para o parâmetro de regularização foi  $\lambda = 20,0$  e o resultado está na Figura 43. A melhoria do resultado, em comparação ao algoritmo sem uso da regularização é muito notável. As interfaces ficam melhores definidas e principalmente a depressão central.

Os valores de discrepância em relação ao modelo original são reduzidos, inclusive na região central que é mais problemática sem a presença da regularização. A definição das interfaces também é influenciada pela suavização que é feita por média móvel, por isso há um valor de discrepância mínimo que sempre existirá no resultado final da tomografia.

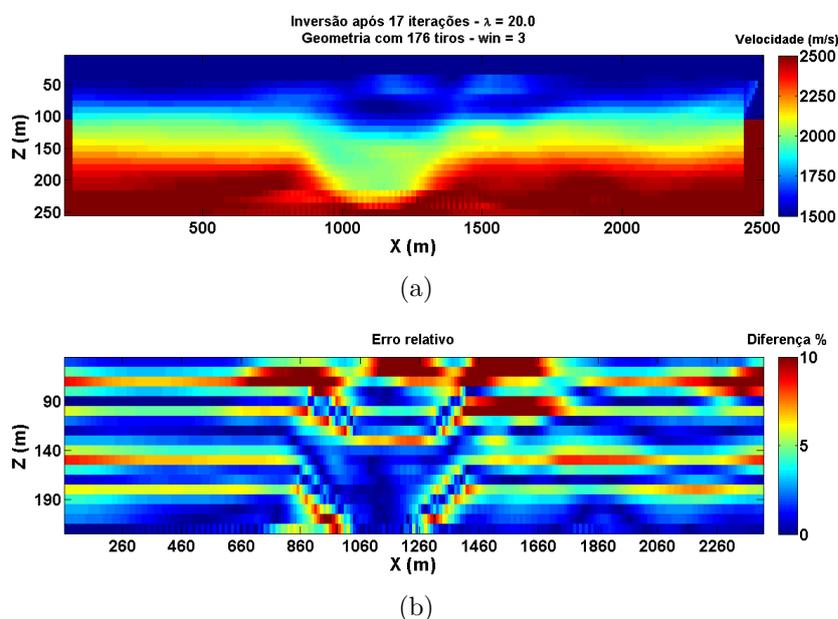


Figura 43 – Tomografia de refração,  $\lambda = 20,0$  e suavização,  $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 17 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

Visto a melhora obtida com a regularização de primeira ordem, testou-se aumentar o valor do parâmetro de regularização para  $\lambda = 40,0$ . O resultado está na Figura 44. Com mais peso na regularização, o resultado melhorou de forma geral, visto que houve uma redução na discrepância em todo o modelo invertido.

Nesse último resultado as camadas e interfaces ficaram com melhor definição, quando comparadas aos resultados anteriores. Inclusive, a região à direita da depressão ficou melhor definida com o parâmetro  $\lambda = 40,0$  do que para  $\lambda = 20,0$ . Destaca-se também a melhor continuidade que as camadas tem, assim como uma definição muito melhor da região da depressão.

Pelo gráficos de erro relativo, percebe-se que a região com mais dificuldade para ser definida (mesmo para  $\lambda = 40,0$ ) é a região central. Isso é o esperado, visto que esta

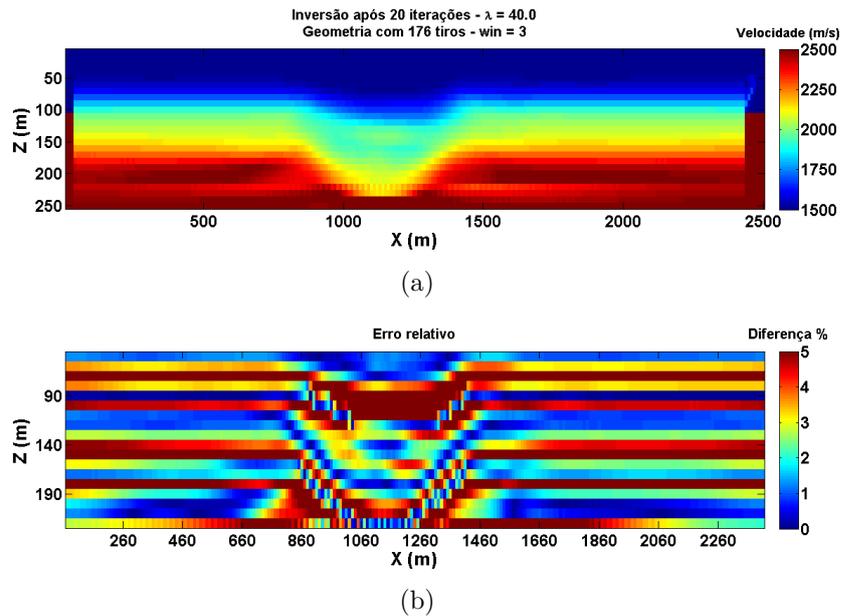


Figura 44 – Tomografia de refração,  $\lambda = 40,0$  e suavização,  $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 17 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

área, devido à sua geometria, altera a cobertura dos raios, inclusive em suas proximidades.

### 4.2.3 Modelo 3

O modelo 3 é formado por quatro camadas com velocidades entre  $1500m/s$  e  $3000m/s$  e uma anomalia de baixa velocidade (aproximadamente  $1000m/s$ ) na parte rasa do modelo. As camadas também apresentam uma região em que não são plano paralelas, conforme ilustra a Figura 45. A detecção da zona de baixa velocidade é um desafio ao interpretar-se dados de refração.

As dimensões desse modelo são maiores que dos dois primeiros, mas a discretização usada é idêntica. A geometria de aquisição também é idêntica, mas como a extensão horizontal do modelo 3 é maior tem-se um total de 476 tiros.

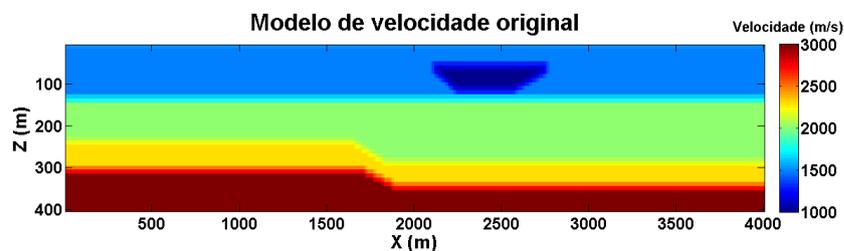


Figura 45 – Modelo de velocidade original (modelo 3) usado na tomografia de refração.

O primeiro teste realizado foi a tomografia sem qualquer regularização, apenas com tratamento *a posteriori*. O resultado está na Figura 46. As interfaces não ficam

bem definidas, principalmente na região para  $X > 2000m$ . Entretanto, é possível notar a anomalia de baixa velocidade, apesar desta ser a região com maior discrepância.

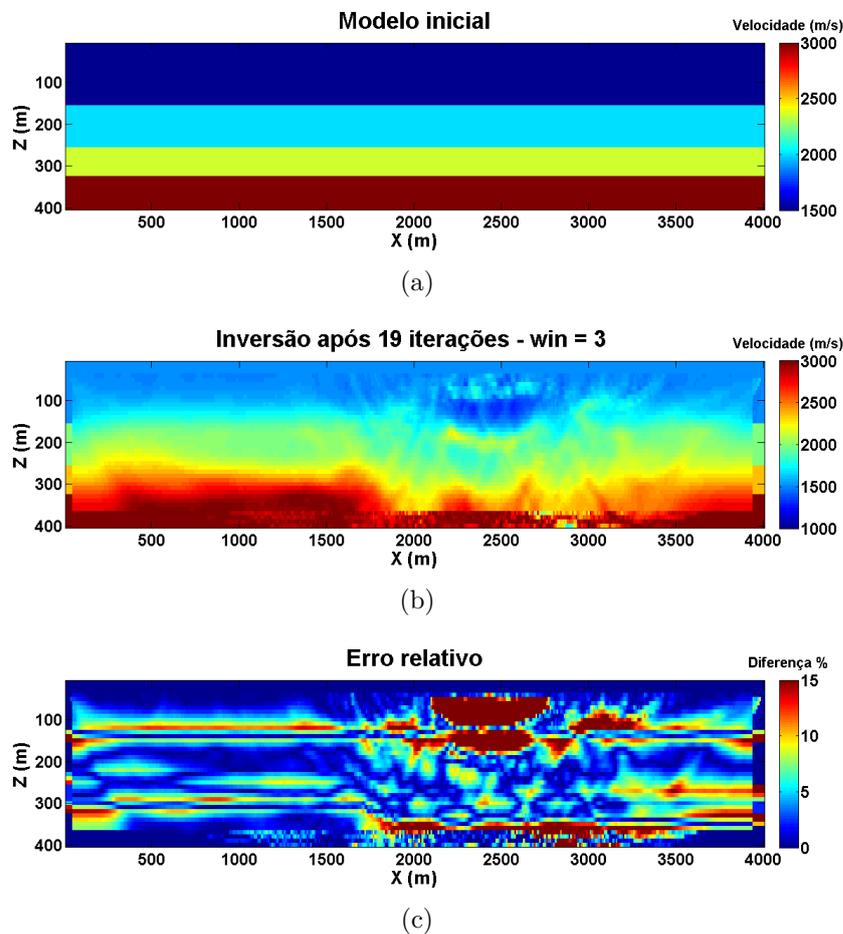


Figura 46 – Tomografia sem qualquer regularização,  $win = 3$ . (a) Modelo inicial para a tomografia. (b) Modelo obtido após 19 iterações tomográficas. (c) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

A qualidade da definição das interfaces na região para  $X > 2000m$  deve ser afetada pela anomalia de baixa velocidade, a qual altera a cobertura nessa área. Nota-se também que isso ocorre nas proximidades da anomalia. Apesar destas discrepâncias, o resultado obtido é satisfatório, haja visto os valores médios de discrepância encontrados e o modelo inicial usado.

#### 4.2.3.1 Regularização de Tikhonov

A regularização de Tikhonov foi usada com o mesmo objetivo de antes, melhorar o resultado da inversão tomográfica. Testou-se o valor de  $\lambda = 20,0$  cujo resultado está na Figura 47. Os dois problemas encontrados na tomografia sem regularização são reduzidos: a definição das interfaces e da zona de baixa velocidade.

Com a regularização de primeira ordem as estruturas do modelo original ficam melhores definidas, inclusive na áreas mais problemáticas, abaixo da zona de baixa velo-

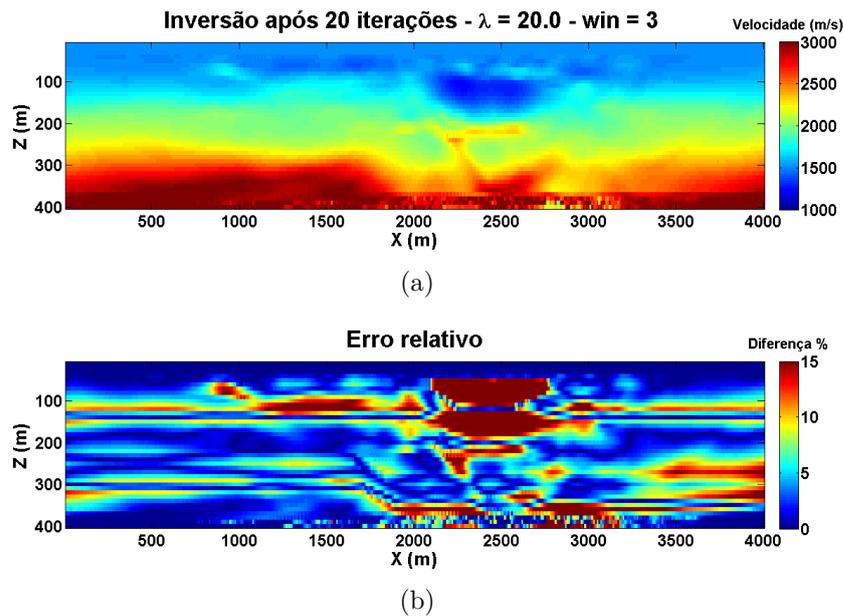


Figura 47 – Tomografia de refração,  $\lambda = 20,0$  e suavização,  $win = 3$ . (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

cidade e em suas proximidades. Observa-se também que as camadas ficam melhores definidas, correspondendo melhor ao modelo original.

Testou-se a regularização com  $\lambda = 40,0$  e o resultado está em Figura 48. Os valores de discrepância nas proximidades da anomalia de baixa velocidade ficam similares ao resultado para  $\lambda = 20,0$ , mas para a região abaixo desta há uma melhora na continuidade da camada. Comparando-se as figuras para os dois valores de  $\lambda$ , observa-se um resultado geral melhor para o segundo valor usado, apesar da perda de resolução da área de baixa velocidade.

Haja visto que se usou um valor maior de  $\lambda$ , o esperado é que as estruturas tornem-se mais horizontais. Ou seja, a regularização provoca uma piora na definição lateral das estruturas que é exatamente o que se observa para  $\lambda = 40,0$ . Entretanto, quanto menos iterações são feitas, menor é esse efeito. Para ilustrar isso, segue a inversão após 5 iterações tomográficas, Figura 49.

Nota-se em Figura 49 uma definição melhor para a região de baixa velocidade, quando comparada à Figura 48. Esse efeito ilustra o cuidado que se deve ter ao usar alguma regularização no processo de inversão. O efeito que a regularização tem sobre a inversão deve ser levado em consideração ao observar-se o resultado final. Nota-se que uma comparação como esta (entre duas iterações com a mesma regularização) é capaz de mostrar o efeito da regularização sobre a tomografia realizada.

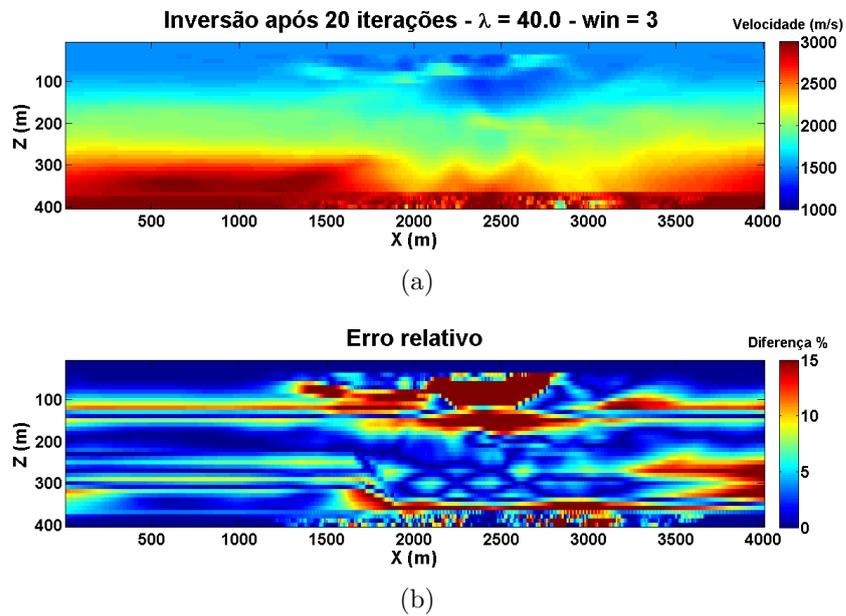


Figura 48 – Tomografia de refração,  $\lambda = 40,0$  e suavização,  $win = 3$ , após 20 iterações. (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

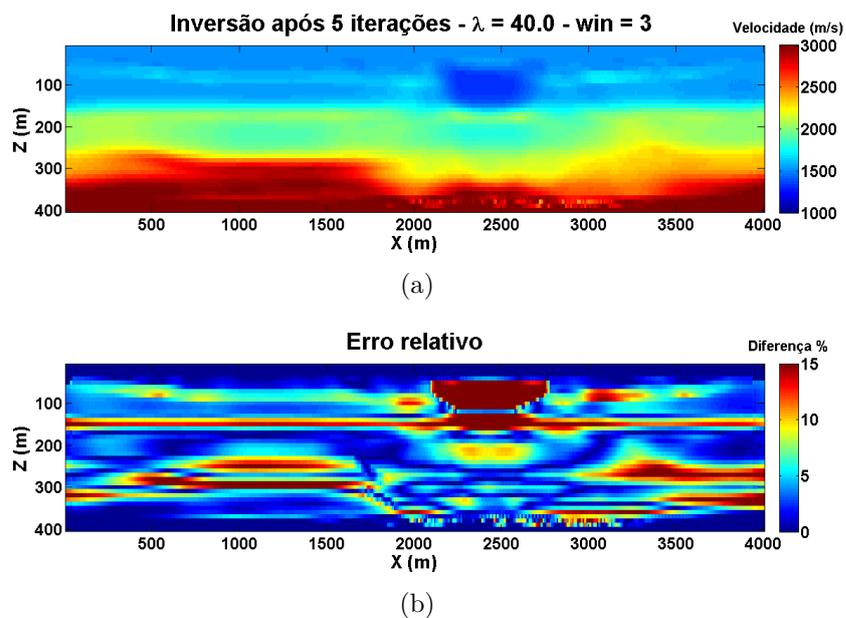


Figura 49 – Tomografia de refração,  $\lambda = 40,0$  e suavização,  $win = 3$ , após 5 iterações. (a) Modelo obtido após 20 iterações tomográficas. (b) Erro relativo entre o modelo original e o obtido pela tomografia.

## 5 Conclusão

O algoritmo tomográfico implementado neste trabalho mostrou-se funcionar satisfatoriamente, o que mostra que as técnicas de cálculo de tempo de trânsito e traçamento de raios usadas são satisfatórias para essa finalidade. A validação do algoritmo permite concluir que mesmo no caso com a maior quantidade possível de medições há um limite mínimo para a discrepância entre o modelo invertido e o modelo original.

Pode-se inferir, também do teste com cobertura completa, que as limitações intrínsecas do algoritmo são consequência principalmente de possíveis limitações nos algoritmos de traçamento de raios e cálculo de tempo de trânsito, uma vez que são soluções numéricas aproximadas. Além disso, há de se considerar que o algoritmo tomográfico usado é uma aproximação linear, a qual também implica em limitação na precisão.

Outra observação importante foi o impacto do ruído aleatório nos dados observados para o processo de inversão tomográfica. Para dados com ruído, tanto a regularização quanto o tratamento *a posteriori* (neste trabalho, suavização das velocidades por média móvel) estabilizam o algoritmo tomográfico de forma a se obter um resultado final satisfatório.

A tomografia de refração implementada neste trabalho teve resultados bons, em que o modelo final da inversão tomográfica apresentou discrepâncias baixas (erro relativo menor que 6%) em relação ao modelo de velocidades original. Os testes realizados mostram que esta técnica, portanto, permite obter modelos de velocidade satisfatórios para baixas profundidades.

Entretanto, o sucesso da tomografia de refração depende da regularização do problema para uma acurácia maior do resultado final. Mostrou-se que a regularização de Tikhonov de primeira ordem pode ser usado para se obter tais resultados, porém não se descarta outras regularizações com esse objetivo. A regularização é importante para se obter uma definição melhor das interfaces e portanto um melhor modelo de velocidades.

Confirmou-se também os resultados de Stefani (1995), isto é, a importância dos receptores correspondentes aos raios com menores comprimentos para um resultado melhor da tomografia de refração. Assim, a geometria de aquisição com mais tiros fornece melhores resultados, visto que também aumenta a cobertura do modelo ao aumentar a densidade de raios.

Como perspectivas deixadas pelo trabalho, destacam-se:

1. Implementar outros algoritmos de cálculo de tempo de trânsito com o objetivo de aumentar a eficiência computacional, como por exemplo, o algoritmo *fast marching* (SETHIAN; POPOVICI, 1999).
2. Testar outras regularizações para a tomografia de refração, a fim de avaliar a eficiências destas.
3. Implementar a tomografia com a otimização de outras funções erro, como feito em Zhang e Toksöz (1998).
4. Testar o quão eficiente são os modelos obtidos pela tomografia de refração como modelos iniciais para outras técnicas de tomografia sísmica, como FWI.
5. Testar outros métodos de otimização tais como métodos tipo Newton.
6. Implementar técnicas que evitem o traçamento de raios e obtenção da derivada de Fréchet (matriz tomográfica), como o *adjoint-state method* (TAILLANDIER et al., 2009).

## Referências

- AKI, K.; RICHARDS, P. G. *Quantitative Seismology*. Segunda edição. Califórnia, EUA: University Science Books, 2002. 700– p. Citado na página 20.
- AMORIM, W. D.; HUBRAL, P.; TYGEL, M. Computing field statics with the help of seismic tomography\*. *Geophysical Prospecting*, 1987. Blackwell Publishing Ltd, v. 35, n. 8, p. 907–919, out. 1987. ISSN 1365-2478. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2478.1987.tb00849.x>>. Citado na página 44.
- ASTER, R. C.; BORCHERS, B.; THURBER, C. H. *Parameter Estimation and Inverse Problems*. [S.l.]: Elsevier Academic Press, 2005. 320– p. Citado 6 vezes nas páginas 30, 31, 33, 34, 35 e 38.
- BERRYMAN, J. G. *Lectures Notes on Nonlinear Inversion and Tomography*. [S.l.]: Lecture notes from MIT, 1991. Citado 4 vezes nas páginas 10, 34, 35 e 43.
- BROWN, A. R. *Interpretation of Three-Dimensional Seismic Data*. Sexta edição. Tuls, Oklahoma, USA: American Association of Petroleum Geologists and Society Of Exploration Geophysicists, 2004. 560– p. Citado na página 18.
- CAPUCCI, F. V. *Tomografia Sísmica por Tempos de Trânsito Poço-à-Poço*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Geologia e Geofísica Marinha, Niterói, RJ, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 62.
- HAMPSON, D.; RUSSEL, B. First-break interpretation using generalized linear inversion. *Journal of the Canadian Society of Exploration Geophysicists*, 1984. v. 20, n. 1, p. 40–54, Dezembro 1984. Disponível em: <[http://209.91.124.56/publications-/journal/1984\\_12/1984\\_Hampson\\_D\\_first\\_break\\_interp.pdf](http://209.91.124.56/publications-/journal/1984_12/1984_Hampson_D_first_break_interp.pdf)>. Citado na página 44.
- IVANOV, J.; MILLER, R.; XIA, J.; STEEPLES, D.; PARK, C. Joint analysis of refractions with surface waves: An inverse solution to the refraction-traveltime problem. *GEOPHYSICS*, 2006. Society of Exploration Geophysicists, v. 71, n. 6, p. R131–R138, nov. 2006. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.2360226>>. Citado na página 48.
- IVANOV, J.; MILLER, R. D.; XIA, J.; STEEPLES, D.; PARK, C. B. The inverse problem of refraction travel times, part I: Types of geophysical nonuniqueness through minimization. *Pure and Applied Geophysics*, 2005. Birkhäuser-Verlag, v. 162, n. 3, p. 447–459–, 2005. ISSN 0033-4553. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00024-004-2615-1>>. Citado 4 vezes nas páginas 11, 45, 46 e 47.
- IVANOV, J.; MILLER, R. D.; XIA, J.; STEEPLES, D. The inverse problem of refraction travel times, part II: Quantifying refraction nonuniqueness using a three-layer model. *Pure and Applied Geophysics*, 2005. Birkhäuser-Verlag, v. 162, n. 3, p. 461–477–, 2005. ISSN 0033-4553. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00024-004-2616-0>>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 47 e 48.

- JONES, I. F. Tutorial: Velocity estimation via ray-based tomography. *First Break*, 2010. v. 28, n. 2, p. 45–52, Fevereiro 2010. Disponível em: <<http://fb.eage.org/publication/content?id=38212>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 40.
- KABIR, N.; ALBERTIN, U.; ZHOU, M.; NAGASSAR, V.; KJOS, E.; WHITAKER, P.; FORD, A. Use of refraction, reflection, and wave-equation-based tomography for imaging beneath shallow gas: A trinidad field data example. *GEOPHYSICS*, 2008. Society of Exploration Geophysicists, v. 73, n. 5, p. VE281–VE289, set. 2008. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.2953064>>. Citado na página 49.
- KEAREY, P.; BROOK, M.; HILL, I. *Geofísica de exploração*. Primeira edição. São Paulo, Brasil: Oficina de Textos, 2009. 438– p. Citado 7 vezes nas páginas 21, 22, 23, 25, 27, 28 e 29.
- LINES, L.; NEWRICK, R. *Fundamentals of Geophysical Interpretation*. Primeira edição. Society of Exploration Geophysicists, 2004. 288– p. ISSN 978-1-56080-125-2. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.9781560801726>>. Citado 4 vezes nas páginas 19, 26, 42 e 49.
- MARTINS, J. L. *Mapeamento de Estruturas Internas de Rochas Reservatórios através de Inversão Tomográfica*. Tese (Doutorado) — Programa de Pesquisa e Pós-Graduação em Geofísica - Universidade Federal da Bahia, Salvador, BA, Dezembro 1992. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 41.
- MENKE, W. *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*. Edição revista. [S.l.]: Academic Press Elsevier, 1989. 289– p. Citado 4 vezes nas páginas 30, 32, 36 e 37.
- MIN, D.; SHIN, C. Refraction tomography using a waveform-inversion back-propagation technique. *GEOPHYSICS*, 2006. Society of Exploration Geophysicists, v. 71, n. 3, p. R21–R30, maio 2006. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.2194522>>. Citado na página 44.
- MITCHELL, J.; BOLANDER, R. Structural interpretation using refraction velocities from marine seismic surveys. *GEOPHYSICS*, 1986. Society of Exploration Geophysicists, v. 51, n. 1, p. 12–19, jan. 1986. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.1442026>>. Citado na página 26.
- MOUSA, W.; AL-SHUHAIL, A.; AL-LEHYANI, A. A new technique for first-arrival picking of refracted seismic data based on digital image segmentation. *GEOPHYSICS*, 2011. Society of Exploration Geophysicists, v. 76, n. 5, p. V79–V89, set. 2011. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/geo2010-0322.1>>. Citado na página 45.
- OSYPOV, K. Refraction tomography without ray tracing. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 1999. SEG, v. 18, n. 1, p. 1283–1286, 1999. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?SGA/18/1283/1>>. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- PALMER, D. An introduction to the generalized reciprocal method of seismic refraction interpretation. *GEOPHYSICS*, 1981. Society of Exploration Geophysicists, v. 46, n. 11, p. 1508–1518, nov. 1981. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.1441157>>. Citado 3 vezes nas páginas 10, 28 e 29.

- PALMER, D.; JONES, L. Computing detailed refraction statics in a hard rock terrain with the grm and the rcs. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. Society of Exploration Geophysicists, 2005. p. 1037–1040–. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.2147857>>. Citado na página 50.
- PODVIN, P.; LECOMTE, I. Finite difference computation of traveltimes in very contrasted velocity models: a massively parallel approach and its associated tools. *Geophysical Journal International*, 1991. v. 105, p. 271–284, 1991. Citado 5 vezes nas páginas 11, 19, 51, 52 e 53.
- PYUN, S.; SHIN, C.; MIN, D.; HA, T. Refraction traveltime tomography using damped monochromatic wavefield. *GEOPHYSICS*, 2005. Society of Exploration Geophysicists, v. 70, n. 2, p. U1–U7, mar. 2005. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.1884829>>. Citado na página 44.
- RE, S.; STROBBIA, C.; STEFANO, M. D.; VIRGILIO, M. Simultaneous joint inversion of refracted and surface waves. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. Society of Exploration Geophysicists, 2010. p. 1914–1918–. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.3513216>>. Citado na página 49.
- SCALES, J. A.; SMITH, M. L.; TRIETEL, S. *Introductory Geophysical Inverse Theory*. [S.l.]: Samizdat Press, 2001. 208– p. Citado 3 vezes nas páginas 38, 40 e 60.
- SETHIAN, J.; POPOVICI, A. 3-d traveltime computation using the fast marching method. *GEOPHYSICS*, 1999. Society of Exploration Geophysicists, v. 64, n. 2, p. 516–523, mar. 1999. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.1444558>>. Citado na página 93.
- SHERIFF, R. E. *Exploration Seismology*. Segunda edição. Nova York, EUA: Cambridge University Press, 1995. 628– p. Citado 6 vezes nas páginas 10, 20, 21, 23, 24 e 26.
- STEFANI, J. Turning ray tomography. *GEOPHYSICS*, 1995. Society of Exploration Geophysicists, v. 60, n. 6, p. 1917–1929, nov. 1995. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.1443923>>. Citado 5 vezes nas páginas 44, 45, 49, 80 e 92.
- TAILLANDIER, C.; DELADERRIÈRE, N.; THEROND, A.; MEUR, D. L. First arrival traveltime tomography - when simpler is better. *73rd EAGE Conference & Exhibition*, 2011. Extended abstract, Maio 2011. Disponível em: <<http://earthdoc.eage.org/publication/publicationdetails/?publication=50466>>. Citado na página 44.
- TAILLANDIER, C.; NOBLE, M.; CHAURIS, H.; CALANDRA, H. First-arrival traveltime tomography based on the adjoint-state method. *GEOPHYSICS*, 2009. Society of Exploration Geophysicists, v. 74, n. 6, p. WCB1–WCB10, nov. 2009. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.3250266>>. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 93.
- TANIS, M.; SHAH, H.; WATSON, P.; HARRISON, M.; YANG, S.; LU, L.; CARVILL, C. Diving-wave refraction tomography and reflection tomography for velocity model building. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. Society of Exploration Geophysicists, 2006. p. 3340–3344–. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.2370225>>. Citado na página 44.

TARANTOLA, A.; VALETTE, B. Inverse problems = quest for information. *Journal of Geophysics*, 1982. v. 50, p. 159–170, 1982. Citado na página 30.

TELFORD, W. M.; GELDART, L. P.; SHERIFF, R. E. *Applied Geophysics*. Segunda edição. Nova York, EUA: Cambridge University Press, 1990. 792– p. Citado 7 vezes nas páginas 10, 18, 20, 22, 23, 25 e 26.

VESNAVER, A.; BÖHM, G.; MADRUSSANI, G.; PETERSEN, S.; ROSSI, G. Tomographic imaging by reflected and refracted arrivals at the north sea. *GEOPHYSICS*, 1999. Society of Exploration Geophysicists, v. 64, n. 6, p. 1852–1862, nov. 1999. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.1444691>>. Citado na página 49.

VIDALE, J. Finite-difference calculation of travel times. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1988. v. 78, n. 6, p. 2062–2076, Dezembro 1988. Citado na página 52.

VIRIEUX, J.; OPERTO, S. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *GEOPHYSICS*, 2009. Society of Exploration Geophysicists, v. 74, n. 6, p. WCC1–WCC26, nov. 2009. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.3238367>>. Citado na página 49.

WANG, C.; DELOME, H.; CALDERON, C.; YINGST, D.; LEVEILLE, J.; BLOOR, R.; FARMER, P. Practical strategies for waveform inversion. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. Society of Exploration Geophysicists, 2011. p. 2534–2538. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.3627718>>. Citado na página 41.

WHITE, D. J. Two-dimensional seismic refraction tomography. *Geophysical Journal International*, 1989. v. 97, n. 2, p. 223–245, maio 1989. Disponível em: <<http://gji.oxfordjournals.org/content/97/2/223.abstract>>. Citado na página 44.

WOODWARD, M.; NICHOLS, D.; ZDRAVEVA, O.; WHITFIELD, P.; JOHNS, T. A decade of tomography. *GEOPHYSICS*, 2008. Society of Exploration Geophysicists, v. 73, n. 5, p. VE5–VE11, set. 2008. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.2969907>>. Citado na página 18.

YILMAZ, Seismic data analysis. In: \_\_\_\_\_. Society of Exploration Geophysicists, 2001. cap. 3. Velocity Analysis and Statics Corrections, p. 271–462. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.9781560801580.ch3>>. Citado 4 vezes nas páginas 10, 26, 27 e 28.

YILMAZ, Seismic data analysis. In: \_\_\_\_\_. Society of Exploration Geophysicists, 2001. cap. 9. Earth Modeling in Depth, p. 1353–1556. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.9781560801580.ch9>>. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 50.

ZHANG, J.; TOKSÖZ, M. Nonlinear refraction travelttime tomography. *GEOPHYSICS*, 1998. Society of Exploration Geophysicists, v. 63, n. 5, p. 1726–1737, set. 1998. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.1444468>>. Citado na página 93.

ZHDANOV, M. S. *Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems*. Primeira. Países Baixos: Elsevier, 2002. Citado 7 vezes nas páginas 30, 31, 32, 33, 36, 38 e 41.

---

ZHU, X.; VALASEK, P.; ROY, B.; SHAW, S.; HOWELL, J.; WHITNEY, S.; WHITMORE, N.; ANNO, P. Recent applications of turning-ray tomography. *GEOPHYSICS*, 2008. Society of Exploration Geophysicists, v. 73, n. 5, p. VE243–VE254, set. 2008. ISSN 0016-8033. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.2957894>>. Citado na página 49.